

**FICHA 4 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS**

**VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS**

1. Suponha que um aparelho de detecção de fogos utiliza quatro células sensíveis à temperatura, actuando independentemente umas das outras e podendo uma ou mais activar o alarme. Cada célula possui uma probabilidade de activar o alarme igual a 0.9, quando a temperatura for igual ou superior a  $50^{\circ}C$ . Seja  $X$  a variável que representa o nº de células que activam o alarme quando a temperatura atinge os  $50^{\circ}C$ .
  - a) Determine a função massa de probabilidade (f.m.p.),  $f$ , de  $X$  e verifique as suas propriedades;
  - b) Determine a respectiva função de distribuição  $F$ ;
  - c) Represente graficamente as funções  $f$  e  $F$ ;
  - d) Usando a f.m.p.,  $f$ , e a função de distribuição,  $F$ , calcule:
    - i)  $P(X \geq 2)$
    - ii)  $P(X \leq 3.4)$
    - iii)  $P(0 < X \leq 3)$
    - iv)  $P(1 \leq X \leq 4)$
    - v)  $P(|X - 1| < 2)$
    - vi)  $P(0 < X \leq 3 | X \geq 2)$
  - e) Calcule os valores da esperança matemática,  $E(X)$ , do momento simples de 2ª ordem,  $E(X^2)$ , e do desvio padrão,  $\sigma(X)$ ;
  - f) Calcule a probabilidade de:
    - i) o alarme funcionar quando a temperatura atinge os  $50^{\circ}C$ ;
    - ii) pelo menos uma das células não funcionar quando a temperatura atinge os  $50^{\circ}C$ .
2. Considere a variável aleatória  $X$  que representa o número de ases encontrados em 3 cartas retiradas de um baralho de 52 cartas. Determine a f.m.p. de  $X$ , no caso de as cartas serem retiradas do baralho com e sem reposição.
3. O número de filhos com menos de 18 anos de idade em famílias Afro-Americanas nos Estados Unidos em 2004 é dado na seguinte tabela:

Nº filhos com menos de 18 anos	0	1	2	3	4
Proporção de famílias	0.42	0.24	0.19	?	0.05

- a) Calcule a probabilidade de uma família Afro-Americana escolhida ao acaso ter:
  - i) três filhos
  - ii) no máximo um filho
  - iii) mais de três filhos
- b) Numa família Afro-Americana, qual o número esperado de filhos e a variabilidade em torno desse valor?
- c) Determine  $E(2X - 4)$ ,  $V(2X - 4)$  e  $E[(X - 1)^2]$ .

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

4. Indique quais das seguintes funções reais de variável real pode ser função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \in [1;2] \\ 0, & x \notin [1;2] \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 2 \leq x < 4 \\ \ln(x), & 4 \leq x < 5 \\ 0, & x \notin [2;5[ \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

5. A procura diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com função densidade de probabilidade (f.d.p.) definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2kx, & 0 \leq x < 1 \\ -kx + 1, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x \notin [0;3] \end{cases}$$

- a) Determine o valor da constante  $k$  e represente graficamente a função  $f$ ;
  - b) Determine analiticamente a função de distribuição  $F$  e represente-a graficamente;
  - c) Utilizando as funções  $f$  e  $F$ , calcule a probabilidade da procura de arroz, num dia escolhido ao acaso:
    - i) exceder 200  $kg$  de arroz
    - ii) se situar entre 50 e 250  $kg$  de arroz
    - iii) ser, no máximo, de 103  $kg$  de arroz
    - iv) ser inferior a 100  $kg$ , sabendo que noutro dia oscilou entre 200 e 290  $kg$
  - d) Calcule o valor esperado da procura diária de arroz, assim como uma medida da variabilidade dessa procura;
  - e) Calcule o valor  $a$  de modo que  $P(X \leq a) = 0.5$ . Que parâmetro da distribuição de probabilidade de  $X$  identifica o valor de  $a$ ? Interprete esse valor;
  - f) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada diariamente à disposição do público para que não falte arroz em 95% dos dias?
6. Uma cadeia de hipermercados vende, por semana, uma quantidade de carne (expressa em toneladas) que admitimos ser uma variável aleatória  $X$  com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left( x + \frac{1}{2} \right), & 0 \leq x \leq k \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- a) Determine o valor da constante  $k$ ;
- b) Obtenha a função distribuição de  $X$  e represente-a graficamente;
- c) Calcule e interprete os valores da mediana e do sexto percentil;
- d) Determine a variância das vendas semanais de carne da cadeia de hipermercados;
- e) Qual a probabilidade das vendas semanais de carne da cadeia de hipermercados ser de pelo menos duas toneladas? E de vender entre duas e quatro toneladas?