FICHA 5 - DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS: BINOMIAL, POISSON E NORMAL

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL E DE POISSON

1. Numa cidade, observaram-se dez indivíduos afectados por uma doença que causa uma taxa de mortalidade de 10%. Seja X a variável aleatória que representa o número de indivíduos observados que morrem da doença.
 - a) Qual a lei de distribuição da variável X ?
 - b) Apresente a função massa de probabilidade da v. a. X ;
 - c) Determine a probabilidade de que morram, pelo menos, três indivíduos;
 - d) Qual o número esperado de sobreviventes?
 - e) Determine a probabilidade de que sobrevivam 9 indivíduos.

2. Com base em sondagens efectuadas, estima-se que, do total da população duma região, 60% considera que a integração europeia tem reflexos positivos, 25% reflexos negativos e as restantes pessoas não têm opinião definida.
 - a) Calcule a probabilidade de, em doze pessoas dessa região, cinco considerarem que a integração tem reflexos positivos;
 - b) Se forem inquiridas 90 pessoas, quantas se espera que considerem que a integração tem reflexos negativos.

3. Admita que em certa disciplina são leccionadas quinze aulas teóricas ao longo do semestre e que a probabilidade de um aluno assistir a uma dessas aulas é de 0.3 . Sabe-se ainda que frequentando a totalidade das aulas teóricas leccionadas, o aluno recebe um bónus de um valor a adicionar à classificação obtida no exame.
 - a) Indique, justificando, a lei da variável aleatória que representa o número de aulas teóricas assistidas por um aluno inscrito nessa disciplina;
 - b) Qual a probabilidade de um aluno inscrito na disciplina em causa vir a receber o bónus?
 - c) Qual a probabilidade de um aluno inscrito na disciplina considerada ter assistido a, pelo menos, 60% das aulas leccionadas?
 - d) Considerados trinta alunos de entre os inscritos na disciplina, qual a probabilidade de dois deles terem assistido a, pelo menos, 60% das aulas leccionadas?

4. Estudos realizados num Hospital Pediátrico conduziram à conclusão que o número de acidentes domésticos sofridos, anualmente por uma criança com idade inferior a seis anos, segue uma distribuição Binomial de média 0.2 e variância 0.192 .
 - a) Indique os parâmetros da distribuição considerada;
 - b) Escolhida uma criança ao acaso, determine a probabilidade de:
 - i) sofrer, no máximo, um acidente doméstico num ano;
 - ii) sofrer mais de dois acidentes domésticos, ao fim de quatro anos.

5. Mostre que em geral $b(X, n, p) = b(n-X, n, 1-p)$.

6. Uma fabrica que produz polpa de tomate controla a qualidade dos carregamentos de tomate que compra inspeccionando, em cada carregamento, 10 tomates e classificando-os em com defeitos ou sem defeitos. A fábrica tem por regra rejeitar o carregamento se encontrar mais de dois tomates com defeitos na amostra de 10 tomates que retira do carregamento.
- Supondo que 5% dos tomates num dado carregamento apresentam defeitos, qual a probabilidade da fábrica aceitar o lote?
 - Supondo que 25% dos tomates num dado carregamento apresentam defeitos, qual a probabilidade da fábrica aceitar o lote?
 - Suponha que com $p=0.05$ (5% de defeituosos) se considera que o carregamento é de elevada qualidade. Qual será então a probabilidade da fabrica rejeitar um lote de elevada qualidade?
7. Uma outra empresa considera que um carregamento de tomates é de elevada qualidade se tiver apenas 1% de tomates com defeitos. A empresa tem um sistema de amostragem com $N=20$ (retira 20 tomates por carregamento) e pretende que a probabilidade de aceitar um lote de elevada qualidade seja de 0.999 (99.9%). Qual deverá ser o número máximo de tomates defeituosos que a empresa deverá então admitir na amostra?
8. O número de chamadas telefónicas recebidas diariamente por uma telefonista é uma variável aleatória X com função massa de probabilidade:
- $$f(x) = P(X = x) = e^{-5} \frac{5^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$
- Identifique a distribuição e indique a sua média e variância;
 - Calcule a probabilidade de não se receber nenhuma chamada num dia;
 - Calcule a probabilidade de serem recebidas entre 5 e 8 (inclusive) chamadas num dia;
 - Calcule a probabilidade de serem recebidas entre 10 e 12 (exclusive) chamadas num fim-de-semana;
 - Calcule a probabilidade de serem recebidas 32 chamadas numa semana.
9. Admita que o número de pessoas que chegam a uma fila para obter senha para o almoço, durante intervalos de 3 minutos, segue uma lei de Poisson com parâmetro 2. Determine a probabilidade de que:
- ninguém chegue durante 3 minutos;
 - cheguem, no máximo, 2 pessoas durante 12 minutos;
 - cheguem, pelo menos, 8 pessoas durante meia hora.

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

10. O tempo total diário (em minutos) que o André leva para ir de casa até à ESAC é constituído por três percursos: desde que sai de casa até apanhar o autocarro, a viagem de autocarro e desde que sai do autocarro até chegar à ESAC. Considere T_1 , T_2 e T_3 as variáveis que representam os tempos associados aos respectivos percursos. As variáveis aleatórias T_1 , T_2 e T_3 são independentes com distribuições Normais de média μ e variância σ^2 , $N(\mu; \sigma^2)$, respectivamente, $N(6; 1)$, $N(20; 6)$ e $N(5; 0.5)$.
- Interprete as seguintes probabilidades e calcule-as:

i) $P(T_1 = 5)$

ii) $P(T_1 < 6)$

iii) $P(T_1 \leq 9)$

- iv) $P(T_1 < 4)$ v) $P(15 \leq T_2 < 16)$ vi) $P(18 < T_2 < 22)$
 vii) $P(T_3 > 1)$ viii) $P(T_3 > 10)$

- b) Determine e interprete os valores do oitavo decil e do sétimo percentil da variável T_2 ;
- c) Defina uma variável aleatória adequada e a sua respectiva distribuição, que permita calcular a probabilidade de que:
- i) o tempo total diário gasto pelo André desde que sai de casa até à ESAC, exceda 40 minutos;
 - ii) o tempo gasto pelo André, num dia, desde que sai do autocarro até à ESAC seja superior a $\frac{1}{5}$ do tempo total diário;
 - iii) o tempo diário médio, gasto pelo André desde que entra no autocarro até à ESAC, durante uma semana de aulas, seja inferior a 22 minutos.
- d) Suponha que o André encontra o amigo Lucas à saída do autocarro. O tempo de conversa entre ambos segue uma distribuição $N(5; \sigma^2)$. Calcule, se possível, o valor de σ^2 para que o tempo de conversa seja inferior a 4 minutos com uma probabilidade de, pelo menos, 0.9 .
11. Seja X uma variável aleatória, representando o comprimento de barras de ferro (em metros), com distribuição Normal de valor médio 10 m e variância 4 m^2 . Suponha que uma barra é considerada não defeituosa se o seu comprimento estiver compreendido entre 8 e 12 metros.
- a) Qual a probabilidade de que uma barra, escolhida ao acaso, seja defeituosa?
 - b) Qual a probabilidade de que, em dez barras, escolhidas aleatoriamente, pelo menos duas sejam defeituosas?
12. O comprimento das carpas existentes numa barragem é aproximadamente Normal com média igual a 23 cm e desvio padrão igual a 8 cm . A fim de preservar a espécie, decidiu-se que só seria permitida a pesca de carpas com comprimento superior a um determinado valor. As carpas com comprimento inferior ou igual àquele valor, quando pescadas, são devolvidas à barragem.
- a) Sabendo que um pescador apanhou uma carpa, determine a probabilidade de esta ter um comprimento entre 19 e 27 cm ;
 - b) Determine o comprimento mínimo das carpas que podem ser pescadas, sabendo que se pretende que apenas 30% dessas carpas não sejam devolvidas à barragem;
 - c) Com base na informação da alínea anterior e sabendo que um pescador pescou durante um dia 25 carpas, calcule a probabilidade de não devolver à barragem entre 11 e 14 carpas (exclusive).

APROXIMAÇÕES ENTRE DISTRIBUIÇÕES

13. A proporção de alunos de uma determinada universidade que frequentaram colégios particulares no Ensino Secundário é de $\frac{3}{10}$. Assuma uma amostra aleatória de 50 estudantes.
- a) Qual a proporção de exactamente 10 dos estudantes seleccionados terem frequentado colégios particulares?
 - b) Qual a proporção de mais de 19 dos estudantes seleccionados terem frequentado colégios particulares?
 - c) Qual a probabilidade de o número de estudantes provenientes de colégios particulares estar entre 10 e 20 (inclusive)?