

Aproximações entre distribuições (consultar fórmula)

Aproxima-se a $B(n, p)$ pela $\begin{cases} \text{Poisson}(np) & \text{para } n > 20 \text{ e } p \leq 0,05 \\ \text{eNormal}(np, np(1-p)) & \text{quando } n > 20 \text{ e } np > 7 \end{cases}$

Aproxima-se a $P(\lambda)$ pela $eNormal(\lambda, \lambda)$ quando $\lambda \geq 6$

Exercício 15 (folha 5)

$P(\text{um adulto de uma cidade bebe álcool regularmente}) = 0,20$

a) X - v.a. que representa o n.º de pessoas, em 150, que bebem álcool regularmente nessa cidade

$X \sim \text{Binomial}(n=150; p=0,2) \approx Y \sim \text{eNormal}(\mu=30, \sigma^2=24)$
 Dist. discreta ↑ Dist. contínua
 $n > 20 \text{ e } np > 7$

É necessário efectuar a correção de continuidade (e.e.)

i) $P(X < 28) = P(X \leq 27) \approx 0,31037$ (comando de máquina: $\text{binomcdf}(150, 0,2, 27)$)

ou

$$P(X < 28) = P(X \leq 27) \underset{\text{e.e.}}{\approx} P(Y \leq 27,5) = P\left(Z \leq \frac{27,5 - 30}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \leq -0,51) = F(-0,51) = 1 - F(0,51) = 1 - 0,6950 = 0,3050$$

Tab.4

ii) $P(X > 31) = 1 - P(X \leq 31) \underset{\text{máq.}}{\approx} 1 - 0,62723 = 0,37277$

ou $P(X > 31) = P(X \geq 32) \underset{\text{e.e.}}{\approx} P(Y \geq 31,5) = P\left(Z \geq \frac{31,5 - 30}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq 0,31) = 1 - F(0,31) = 1 - 0,6217 = 0,3783$
 Tab.4



(2)

$$\text{iii) } P(X=50) \underset{\text{máq.}}{=} \text{binompdf}(150, 0.2, 50) = 4,61651 \times 10^{-5} \approx 0$$

ou

$$P(X=50) \underset{\text{e.e.}}{\approx} P(49,5 \leq Y \leq 50,5) = P(3,98 \leq Z \leq 4,18) \\ = F(4,18) - F(3,98) \underset{\text{Tab.4}}{=} 0,9999 - 0,9999 = 0$$

Alínea suplementar

$$\text{iv) } P(28 < X \leq 31) = P(29 \leq X \leq 31) = P(X=29) + P(X=30) + P(X=31) \\ \underset{\text{máq.}}{\approx} 0,08053 + 0,08120 + 0,07858 = 0,24031$$

ou

$$P(28 < X \leq 31) = P(29 \leq X \leq 31) \underset{\text{e.e.}}{\approx} P(28,5 \leq Y \leq 31,5) = \\ = P(-0,31 \leq Z \leq 0,31) = 2 \times P(0 < Z < 0,31) \underset{\text{Tab.3}}{=} 2 \times 0,1217 = 0,2434$$

b) $P(\text{adulto beber álcool regularmente}) = 4\%$

N - v.a. que representa o n.º de pessoas, em 150, que bebem álcool regularmente

$$N \sim \text{Binomial}(n=150; p=0,04) \underset{\uparrow}{\sim} \text{Poisson}(\lambda=6)$$

$$n > 20 \text{ e } p \leq 0,05$$

$$P(5 < N < 10) = P(6 \leq N \leq 9) = P(N=6) + P(N=7) + P(N=8) + P(N=9) = \\ = 0,1606 + 0,1377 + 0,1033 + 0,0688 = 0,4704$$

Tab.2

(Usando a Binomial)

ou

$$P(6 \leq N \leq 9) = F(9) - F(5) \approx$$

$$\underset{\text{máq.}}{\approx} \text{binomcdf}(150, 0,04, 9) - \text{binomcdf}(150, 0,04, 5) \approx 0,4779$$

Exercício 16 (folha 5)

(3)

X - v.a. que representa o n.º de flores por cacho de begônias da espécie "Schmidtiana", num determinado dia (contagem ilimitada)

Sabe-se que $P(\text{não haver florescimentos diários}) = P(X=0) = 0,0498$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda=?)$

$$a) P(X=0) = 0,0498 \Leftrightarrow e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = 0,0498 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,0498 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda = \ln(0,0498) \Leftrightarrow -\lambda = -2,999740295 \Leftrightarrow \lambda \approx 3$$

Assim $X \sim \text{Poisson}(\lambda=3)$ (dist. Tabelada - Tab. 2)

$$b) P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,0498 - 0,1494 - 0,2240 = 0,5768$$

c) o mês de Abril tem 30 dias

Y - v.a. que representa o n.º de florescimentos por cacho de begônias da espécie considerada, em 30 dias

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{30}$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda=3)$$

X_i 's independentes

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda = 3 \times 30 = 90)$$

(Utilização da propriedade de aditividade de Poissons)

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda=90)$$

Dist. discreta

$$\overset{\lambda \gg 6}{\approx} T \sim \text{Normal}(\mu=90; \sigma^2=90)$$

Dist. contínua

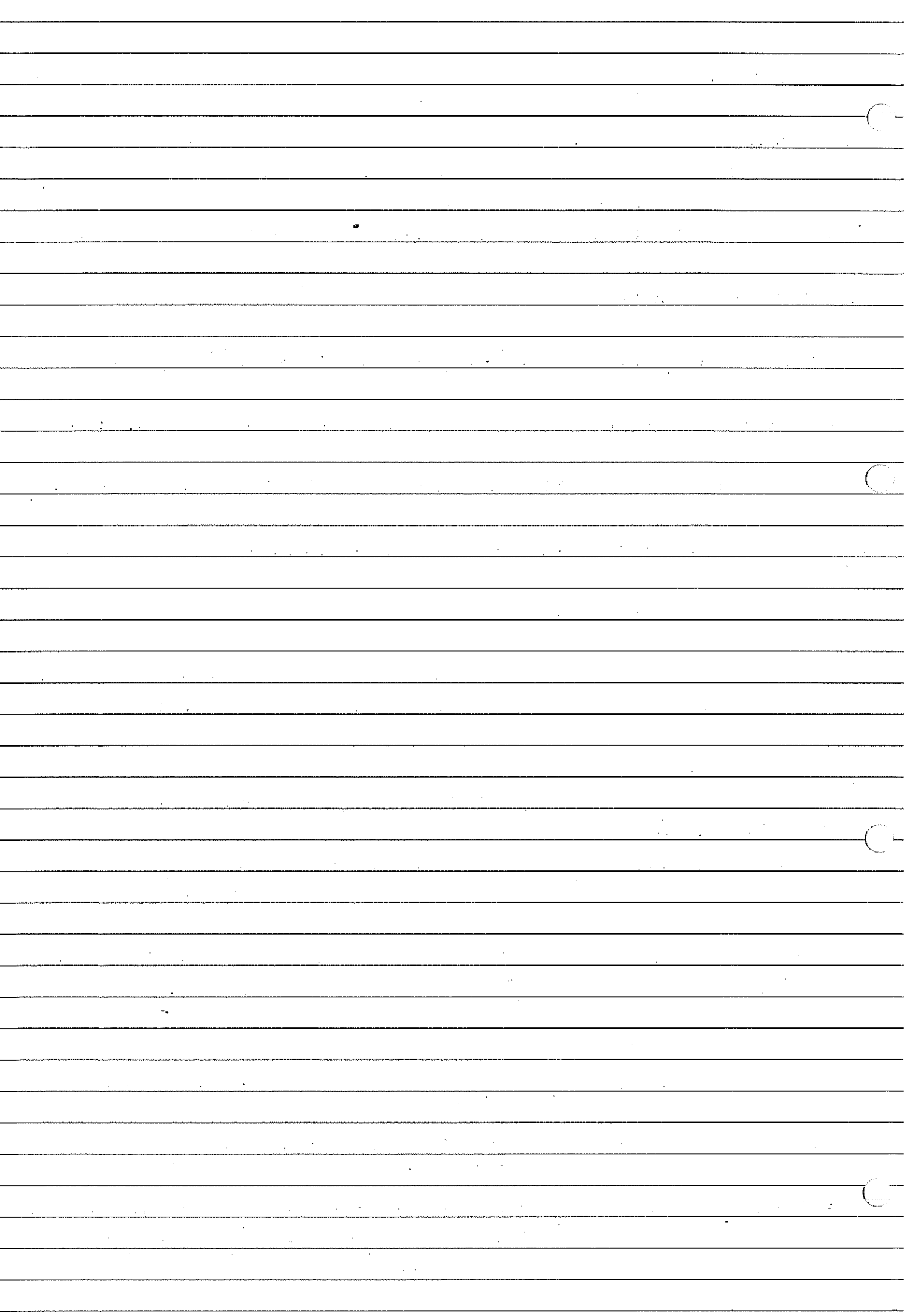
É necessário efetuar a correção de continuidade

$$\text{Assim } P(63 \leq Y \leq 100) \underset{\text{e.e.}}{\approx} P(62,5 \leq T \leq 100,5) =$$

$$= P\left(\frac{62,5-90}{\sqrt{90}} \leq Z \leq \frac{100,5-90}{\sqrt{90}}\right) = P(-2,90 \leq Z \leq 1,11) = F(1,11) - F(-2,9) \\ = 0,8665 - 1 + 0,9981 = 0,8646$$

Tab. 4





Intervalos de confiança e Testes de hipóteses (resolução de exercícios da ficha de Trabalho)

(4)

Exercício 1

Dados fornecidos: $n = 10$ áreas

X - v.a. que representa a área dorsal de uma árvore

Amostra recolhida: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 5918 \text{ cm}^2$

População: $X \sim N(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{desconhecido}}}{\mu}; \sigma^2 = 200^2)$

a) nível de significância = erro de 1ª espécie = 0,5%

• Hipóteses do Teste: $H_0: \mu = 500$ contra $H_1: \mu = 600$ ($\mu > 500$)
para o parâmetro μ (teste unilateral direito)

• Escolha da variável fulcral (ou estatística de teste) adequada:

parâmetro a estimar: μ

tipo população: Normal

dimensão amostra: $n \leq 30$

σ^2 conhecido

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

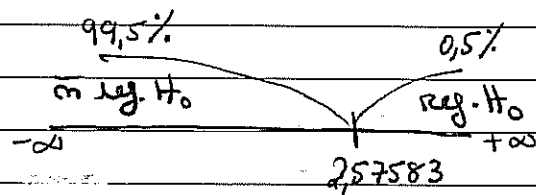
• Valor observado da variável fulcral (ou estatística de teste)
(supondo H_0 verdadeira)

$$Z_{\text{observ.}} = \frac{\bar{x} - 500}{200/\sqrt{10}} = \frac{591,8 - 500}{200/\sqrt{10}} \approx 1,4515$$

• determinação do quantil apropriado
(quantil de $N(0,1)$ de ordem 0,995)

$$z_{0,995} \approx 2,575 \text{ (consulta Tabela 4)}$$

$$\underline{04} \quad z_{0,995} = \text{invNorm}(0,995) \approx 2,57583 \text{ (através da máquina)}$$



Conclusão estatística ($\alpha = 0,05$.)

A região de rejeição ou crítica deste teste será:

$$R = \left\{ x^{(10)} \in \mathbb{R}^{10} : \frac{\bar{x} - 500}{200/\sqrt{n}} > 2,57583 \right\}$$

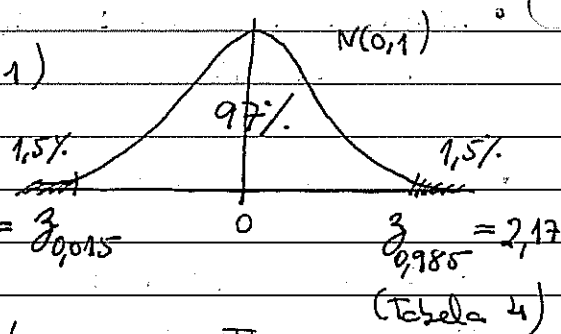
Como na amostra, $Z_{\text{observ.}} \approx 1,4515 \notin R$, não se rejeita a hipótese nula (H_0) pelo que não existe evidência estatística para rejeitar H_0 .

b) Construção do intervalo de confiança para a média populacional μ , com grau de confiança de 97%.

• Variável padronizada: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

• Obtenção dos quantis:

$$-2,17 = -z_{0,985} = z_{0,015}$$



• Construção do I.C. para μ a 97% e/ base na amostra

$$P \left(z_{0,015} \leq \frac{591,8 - \mu}{200/\sqrt{10}} \leq z_{0,985} \right) = 0,97 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \left(-2,17 \cdot \frac{200}{\sqrt{10}} \leq 591,8 - \mu \leq 2,17 \cdot \frac{200}{\sqrt{10}} \right) = 0,97 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \left(-591,8 - 2,17 \cdot \frac{200}{\sqrt{10}} \leq -\mu \leq -591,8 + 2,17 \cdot \frac{200}{\sqrt{10}} \right) = 0,97 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \left(-729,043 \leq -\mu \leq -454,557 \right) = 0,97 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \left(454,557 \leq \mu \leq 729,043 \right) = 0,97$$

Assim $\mu \in [454,557 ; 729,043]$ a 97%.

e) Hipóteses a Testar: para $\alpha = 3\%$

(6)

$H_0: \mu = 600$ contra $H_1: \mu \neq 600$ (Teste bilateral)

Como na alínea anterior construímos o intervalo de confiança para μ a 97%, posso utilizá-lo para responder a esta questão.

Conclusão estatística ($\alpha = 3\%$)

Como $\mu = 600 \notin [454,557; 729,043]$, não se rejeita a hipótese nula, pelo que não existe evidência estatística de que $\mu \neq 600$.



