Sistemas de Equações Lineares
Métodos iterativos:
Jacobi, Gauss-Seidel e relaxação

Aula 10 (27/04/07)

Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia

Escola Superior Agrária de Coimbra
Licenciatura em Engenharia Alimentar 2006/2007

Métodos Iterativos

- Métodos iterativos ou aproximativos que constituem alternativa aos métodos de eliminação estudados
- O sistema [A]{X}={B} é reescrito do seguinte modo:
  - A 1ª equação é reescrita de modo a obter-se uma expressão em ordem a x_1
  - A 2ª equação em ordem a x_2
  - etc..

Métodos iterativos

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

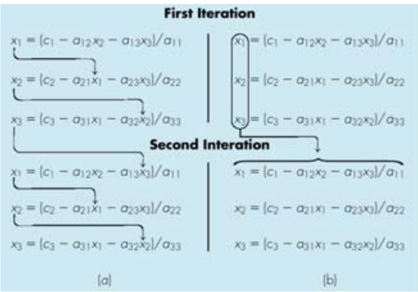
- Iniciamos a solução escolhendo uma estimativa inicial para os valores de x
- Uma solução simples é considerar todos os valores igual a zero
- Nesse caso $x_1=b_1/a_{11}$

2 modos de prosseguir…

- Ou substituímos o novo valor de x_1 na equação de x_2 e depois x_1 e x_2 na expressão de x_3
  - Gauss-Seidel
- Ou então calculamos x_1, x_2 e x_3 sem fazermos a substituição
  - Jacobi

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$
$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Seidel(a) vs Jacobi (b)



Critério de Paragem

- Tanto no método de Gauss-Seidel como no método de Jacobi podemos utilizar o seguinte critério de paragem:

$$\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| 100\% \prec \varepsilon_s$$

- Para todos os *i*, onde *j* e *j-1* representam, respectivamente, a iteração actual e a anterior.

Problemas…

- Em geral o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente que o método de Jacobi
  - – testar com a folha de cálculo fornecida
- Estes métodos, sendo iterativos, apresentam dois problemas
  - – Por vezes não convergem!
  - – Às vezes convergem muito lentamente

Critério de Convergência

- Condição de convergência para duas equações lineares, u(x,y) and v(x,y)

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \prec 1$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \prec 1$$

- No caso de duas equações lineares o método de Gauss-Seidel pode ser expresso como…

$$u(x_1, x_2) = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2$$

$$v(x_1, x_2) = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

- Substituindo no critério de convergência obtemos…

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| \prec 1 \; e \; \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| \prec 1$$

- Ou seja… os valores absolutos dos declives devem ser inferiores à unidade para garantir a convergência!

$$|a_{11}| \succ |a_{12}|$$
$$|a_{22}| \succ |a_{21}|$$

Para n equações…..

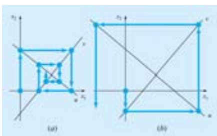
$$\boxed{|aii| \succ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|}$$

divergência

u: 11 x_1+13 x_2=286

v: 11 x_1 – 9 x_2=99

- A ordem pela qual as equações são programadas dita o resultado
  - – Em (a) converge
  - – Em (b) diverge!



$$\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|aii| \succ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|}$$

Relaxação

- De modo a aumentar a convergência do método de Gauss-Seidel podemos utilizar a relaxação.
- Após o cálculo de cada valor de x o valor é modificado por uma média pesada dos resultados da iteração presente com a anterior

$$x_i^{novo} = \lambda x_i^{novo} + (1-\lambda) x_i^{velho}$$

- Onde λ é um factor que varia entre 0 e 2
- Se $\lambda=1$ então (1- λ)= 0 e o valor não se modifica
- Se λ estiver entre 0 e 1 – sub-relaxação
  - Utilizado para "obrigar" um sistema que não converge a convergir ou para aumentar a convergência reduzindo oscilações
- Se λ estiver entre 1 e 2 – sobre-relaxação ou SOR
  - Estamos a colocar um peso extra na nova solução.
  - Podemos aumentar a velocidade de convergência

Gauss-Seidel com relaxação

```
SUBROUTINE Gseid (a,b,n,x,imax,es,lambda)
  DO i = 1,n
    dummy = a_i,i
    DO j = 1,n
      a_i,j = a_i,j/dummy
    END DO
    b_i = b_i/dummy
  END DO
  DO i = 1, n
    sum = b_i
    DO j = 1, n
      IF i≠j THEN sum = sum - a_i,j*x_j
    END DO
    x_i=sum
  END DO
  iter=1
  DO
    sentinel = 1
    DO i = 1,n
      old = x_i
      sum = b_i
      DO j = 1,n
        IF i≠j THEN sum = sum - a_i,j*x_j
      END DO
      x_i = lambda*sum +(1.-lambda)*old
      IF sentinel = 1 AND x_i ≠ 0. THEN
          ea = ABS((x_i - old)/x_i)*100.
          IF ea > es THEN sentinel = 0
      END IF
    END DO
    iter = iter + 1
    IF sentinel = 1 OR (iter ≥ imax) EXIT
  END DO
END Gseid
```