

Equações diferenciais ordinárias Euler e etc.

Aula 11 (17/05/07)
Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia

Escola Superior Agrária de Coimbra
Licenciatura em Engenharia Alimentar 2006/2007

17/05/07

João Noronha/ESAC

1

Equações diferenciais ordinárias

- São equações compostas de uma função desconhecida e das suas derivadas.
- As equações diferenciais são fundamentais nos problemas de engenharia dado que muitos problemas são formulados matematicamente em função da taxa de variação (derivada) de uma dada quantidade física

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v$$

v- variável dependente
t- variável independente

17/05/07

João Noronha/ESAC

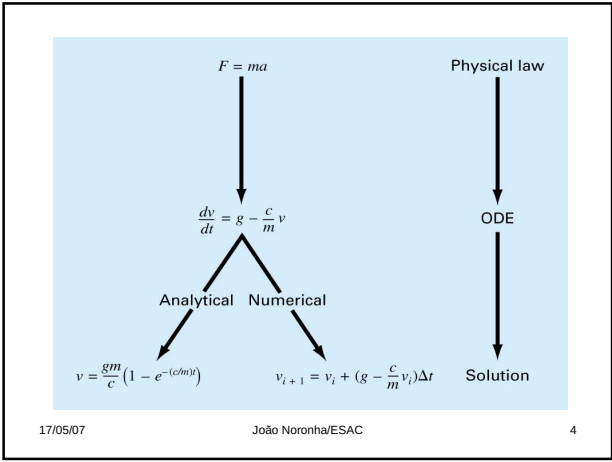
2

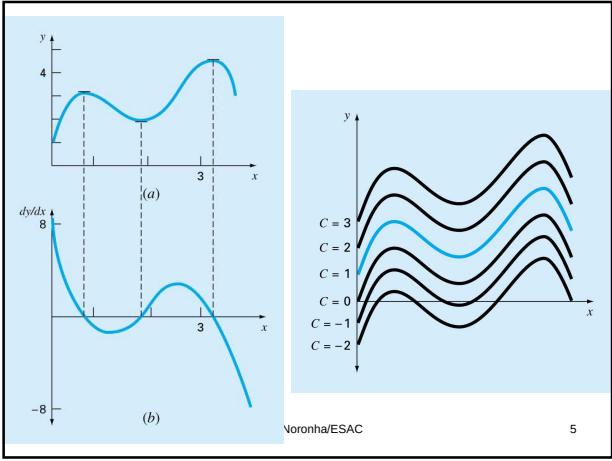
- As funções com uma variável dependente dão denominadas “equações diferenciais ordinárias” – ODE
- Quando existem duas ou mais variáveis independentes falamos de “equações às derivadas parciais” – PDE
- As equações diferenciais podem também ser classificadas de acordo com a sua ordem
 - Equações de primeira ordem – só incluem a 1ª derivada
 - Equações de segunda ordem – incluem a 2ª derivada
- As equações de ordem elevada podem ser reduzidas a um sistema de equações de 1ª ordem

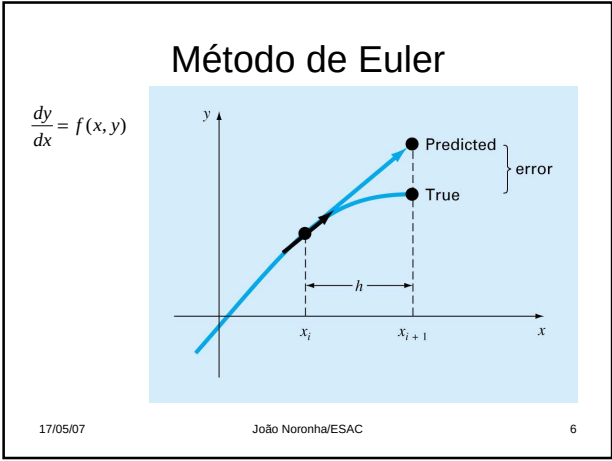
17/05/07

João Noronha/ESAC

3







Método de Euler

- A 1ª derivada permite-nos o cálculo do declive em x_i

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

- Onde $f(x_i, y_i)$ é a equação diferencial avaliada em x_i, y_i . Este valor pode ser substituído na equação

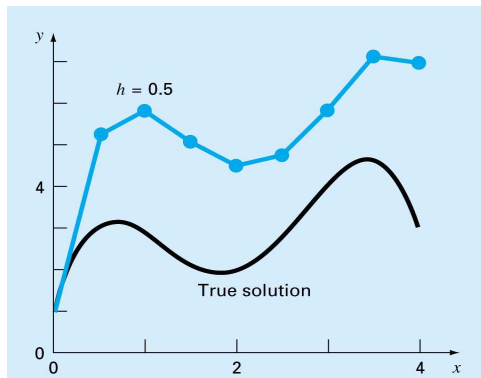
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

- Um novo valor de y é predito, então, utilizando o declive, por extrapolação linear sobre o intervalo de passo h

17/05/07

João Noronha/ESAC

7



17/05/07

João Noronha/ESAC

8

```
*set integration range
xi = 0
xf = 4
*initialize variables
x = xi
y = 1
*set step size and determine
*number of calculation steps
dx = 0.5
nc = (xf - xi)/dx
*output initial condition
PRINT x, y
*loop to implement Euler's method
*and display results
DO i = 1, nc
  dydx = -2x3 + 12x2 - 20x + 8.5
  y = y + dydx * dx
  x = x + dx
  PRINT x, y
END DO
```

17/05/07

9

(a) Main or "Driver" Program

Assign values for
y = initial value dependent variable
xi = initial value independent variable
xf = final value independent variable
dx = calculation step size
xout = output interval

```
x = xi
m = 0
xp0 = x
yp0 = y
DO
  xend = x + xout
  IF (xend > xf) THEN xend = xf
  h = dx
  CALL Integrator (x, y, h, xend)
  m = m + 1
  xp0 = x
  yp0 = y
  IF (x ≥ xf) EXIT
END DO
DISPLAY RESULTS
END
```

17/05/07

João Noronha/ESAC

10

(b) Routine to Take One Output Step

```
SUB Integrator (x, y, h, xend)
DO
  IF (xend - x < h) THEN h = xend - x
  CALL Euler (x, y, h, ynew)
  y = ynew
  IF (x ≥ xend) EXIT
END DO
END SUB
```

(c) Euler's Method for a Single ODE

```
SUB Euler (x, y, h, ynew)
CALL Derivs(x, y, dydx)
ynew = y + dydx * h
x = x + h
END SUB
```

(d) Routine to Determine Derivative

```
SUB Derivs (x, y, dydx)
dydx = ...
END SUB
```

análise de erro no método de Euler

- A solução numérica de ODE implica dois tipos de erro

- Erro de truncatura

- Erro de truncatura local

$$E_a = \frac{f''(x_i, y_i)}{2!} h^2$$
$$E_a = O(h^2)$$

- Erro de truncatura propagado

- A soma dos dois dá-nos o erro global de truncatura

- Erros de arredondamento

17/05/07

João Noronha/ESAC

11

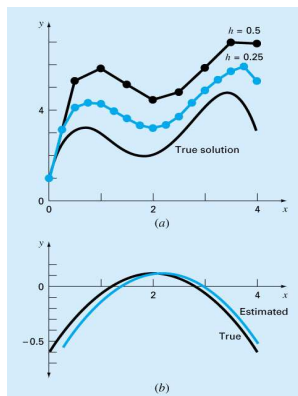
Euler

- A fórmula da Taylor permite a quantificação do erro no método de Euler, no entanto,
 - A série de Taylor dá-nos somente uma estimativa do erro de truncatura local, ou seja, do erro durante um passo do método
 - Em problemas reais as funções são mais complicadas do que polinómios simples pelo que as derivadas necessárias ao cálculo da série de Taylor nem sempre são fáceis de calcular
- Concluindo
 - O erro pode ser reduzido por redução do passo (h)
 - Se a solução da equação diferencial é linear, o método de Euler dá soluções exactas (a 2ª derivada de uma função linear é 0)

17/05/07

João Noronha/ESAC

12



17/05/07 João Noronha/ESAC

13

Melhorias ao método de Euler

- A principal fonte de erro do método de Euler é o facto de se aproximar a derivada da função em todo o intervalo pela derivada da função no ponto inicial do intervalo
- Duas simples modificações ao método permitem minorar este problema
 - Método de Heun
 - Método do Ponto Médio (ou do polígono melhorado)

17/05/07

João Noronha/ESAC

14

Método de Heun

- Um maneira de melhorar a estimativa do declive envolve a determinação de duas derivadas
 - No ponto inicial do intervalo
 - No ponto final do intervalo
- Calcula-se então a média das duas derivadas para obter uma melhor estimativa do declive no intervalo

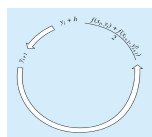
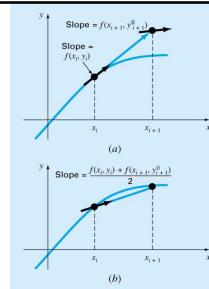
Predictor: $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$

Corrector: $y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$

17/05/07

João Noronha/ESAC

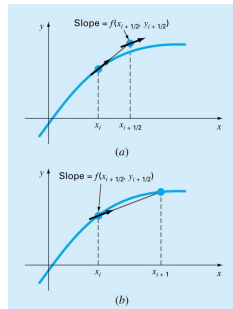
15



Ponto Médio

- Utiliza o método de Euler para calcular o valor de y no ponto médio do intervalo

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$



17/05/07

João Noronha/ESAC

16

Métodos de Runge-Kutta (RK)

- Os métodos de Runge-Kutta permitem atingir uma exactidão equivalente à utilização de expansão em série de Taylor sem ser necessário o cálculo de derivadas de ordem superior à primeira

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad \text{Função incremento}$$

$$a_i \text{'s} = \text{constantes}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad p\text{'s e } q\text{'s são constantes}$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

17/05/07

João Noronha/ESAC

17

- Os k 's são obtidos de modo recursivo
 - Dado cada k corresponder a uma avaliação da função esta recorrência torna os métodos de RK eficientes para cálculo computacional.
- Dependendo do valor de n na função incremento temos diferentes tipos de métodos RK
- O método RK de primeira ordem ($n=1$) reduz-se ao método de Euler
- Uma vez seleccionado o valor de n os valores dos a 's, p 's e q 's são calculados por comparação com uma expansão em série de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

17/05/07

João Noronha/ESAC

18

RK de 2ª ordem

- Os valores de a_1 , a_2 , p_1 , and q_{11} são calculados por comparação entre a equação de 2ª ordem e uma expansão em série de Taylor de segunda ordem.
- Fazendo isto obtemos um sistema de 3 equação a 4 incógnitas

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Assumimos um valor para uma das incógnitas para poder resolver o sistema em ordem às outras três

Dado podermos escolher um número infinito de valores para uma das variáveis (por exemplo a_2) existe um número infinito de métodos de RK de 2ª ordem.

17/05/07

João Noronha/ESAC

19

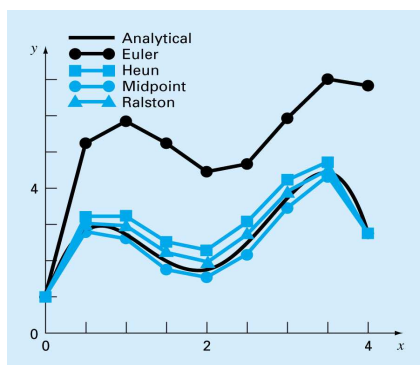
RK de 2ª ordem

- Apesar de diferentes todas as versões do métodos de RK de 2ª ordem dão o mesmo resultados no caso de funções quadráticas, lineares ou constantes.
- No entanto para as outras funções mais complicadas o resultado depende dos valores das constantes
- Três métodos de RK de 2ª ordem são obtidos para diferentes valores de a_2
 - $a_2 = 1/2$ – Método de Heun com um corrector
 - $a_2 = 1$ – Método do ponto médio
 - $a_2 = 2/3$ – Método de Ralston

17/05/07

João Noronha/ESAC

20



17/05/07

João Noronha/ESAC

21
