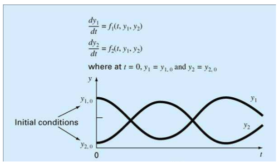
Equações diferenciais ordinárias Condição-Fronteira

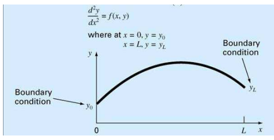
Aula 13 (25/05/07)
Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia

Escola Superior Agrária de Coimbra
Licenciatura em Engenharia Alimentar 2006/2007

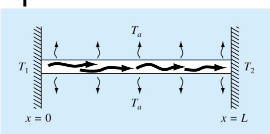
Valor inicial vs condições fronteira

- Problema de valor inicial
  - Todas as condições são especificadas no mesmo valor da variável independente
- Problemas de condição fronteira
  - As condições são especificadas para diferentes valores da variável independente





Métodos para resolução de problemas às condições fronteira



$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Condições Fronteira

$$\begin{cases} T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 \end{cases}$$

Solução analítica…
Considerando os seguintes valores…
T_a=20ºC; T_1=40ºC; T_2=200ºC; h'=0,01m^{-2}; L=10 m

$$T = 73{,}4523e^{0{,}1x} - 53{,}4523e^{-0{,}1x} + 20$$

Método Shooting

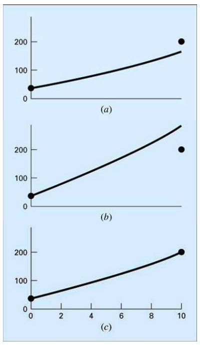
- Conversão do problema às condições fronteira num problema de valor inicial

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h^{'}(T_a - T) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = h'(T - T_a) \end{cases}$$

- A seguir temos de “adivinhar” um valor inicial… por exemplo z(0)=10… o outro já sabemos T(0)=40ºC
- E depois resolvemos o sistema de equações…

Tiro ao alvo…

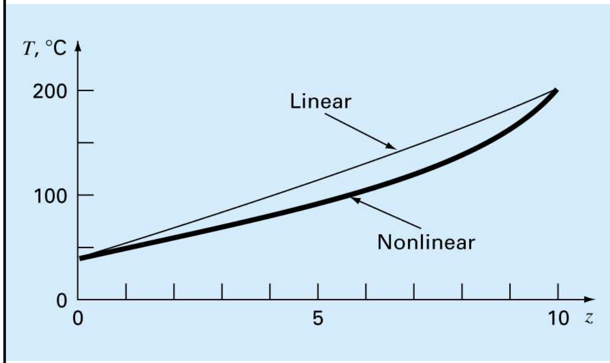
- Usando o método de RK de 4ª ordem e passo 2 obtemos para z(0)=10…
  - T(10)=168.3797ºC
- Este valor é diferente de T(10)=200ºC…
- Tentamos outro valor inicial… z(0)=20 e obtemos
  - T(10)=285.8980ºC
- Agora temos um valor superior a 200ºC
- Podíamos continuar a tentar adivinhar mas neste caso dado o problema ser linear basta fazer um interpolação para encontrarmos o valor de z(0) correcto…
- Interpolando obtemos
  - z(0)= 12,6907 …. T(10)=200ºC



E se não for linear?

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h^{'}(T_a - T)^4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = h'(T - T_a)^4 \end{cases}$$

- Podemos considerar que o valor de T(10) é função da estimativa inicial de z, ou seja, z_0
  - $T(10)=f(z_0)$
    - para diferentes valores de z_0 obtemos valores diferentes de T(10)
- O que queremos é que T(10)=200 (condição na fronteira)
- Podemos definir uma nova função
  - $g(z_0)=f(z_0)-200$
- Quando $g(z_0)=0$ temos a solução do nosso problema
- Para encontrarmos o zero de uma função podemos utilizar um dos métodos estudados anteriormente
  - Bissecção, Newton, etc…
- Vamos utilizar uma folha de cálculo para resolver o problema…



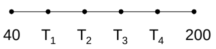
Método das Diferenças finitas

- A alternativa mais comum ao método shooting
- Substituição das derivadas por uma diferença finita

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - h'(T_i - T_a) = 0$$

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a$$



- A equação às diferenças finitas é válida para todos os “nodos” do interior
- Nos primeiro e último “nodos” interiores, T_1 e T_4 são colocadas as condições fronteira.
- Uma equação linear é então transformada num sistema linear de equações algébricas que pode ser resolvido utilizando os métodos estudados,