

Equações diferenciais com derivadas parciais - introdução

Aula 14 (01/05/07)

Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia

Escola Superior Agrária de Coimbra
Licenciatura em Engenharia Alimentar 2006/2007

Classificação

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

- Eq. Lineares de 2ª ordem onde...
- A, B e C representam funções de x e y
- D uma função de x, y, u, $\partial u / \partial x$ e $\partial u / \partial y$
- $B^2 - 4AC < 0$ – Elípticas
- $B^2 - 4AC = 0$ – Parabólicas
- $B^2 - 4AC > 0$ - Hyperbólicas

Exemplos

- Elíptica – Eq. de Laplace
 - Estado estacionário 2D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- Parabólica – Condução de calor
 - Estado Transiente 1D

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k' + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

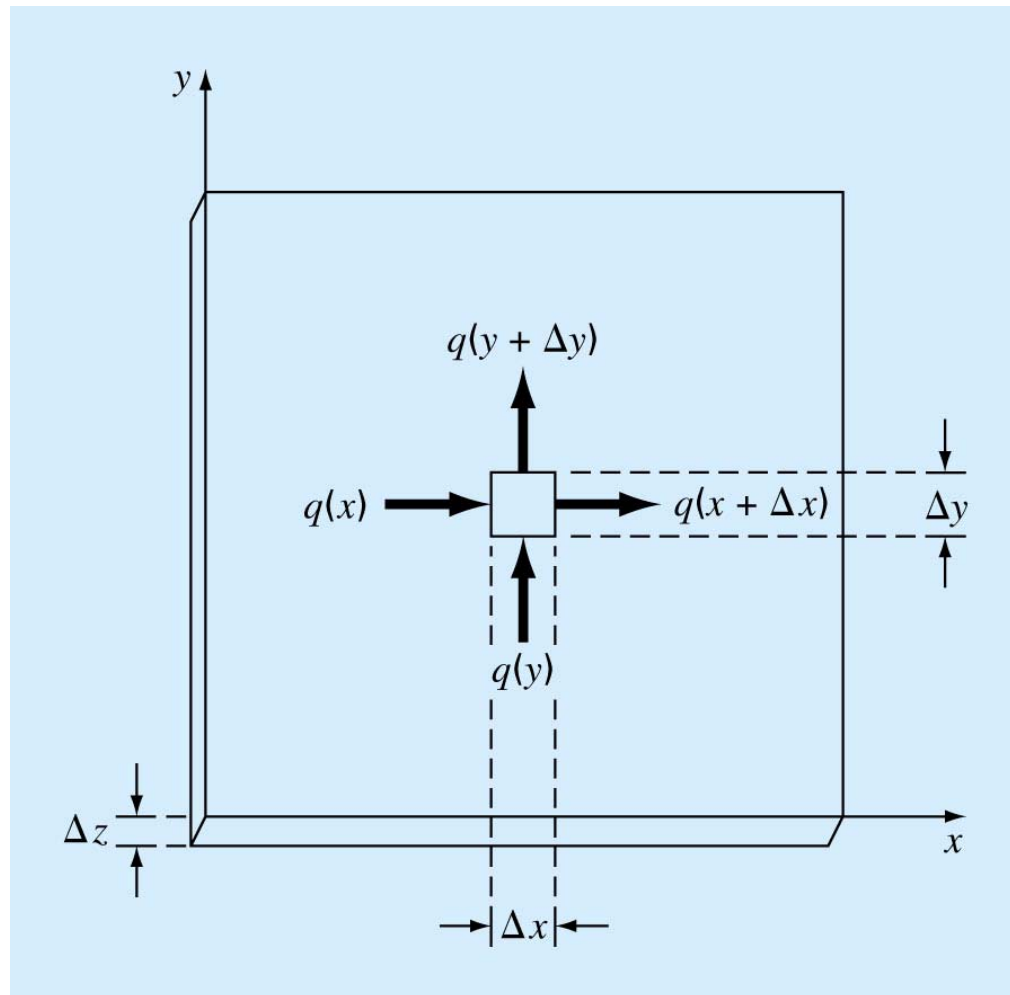
- Hiperbólica – Eq. Onda
 - Variação no tempo 1D

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

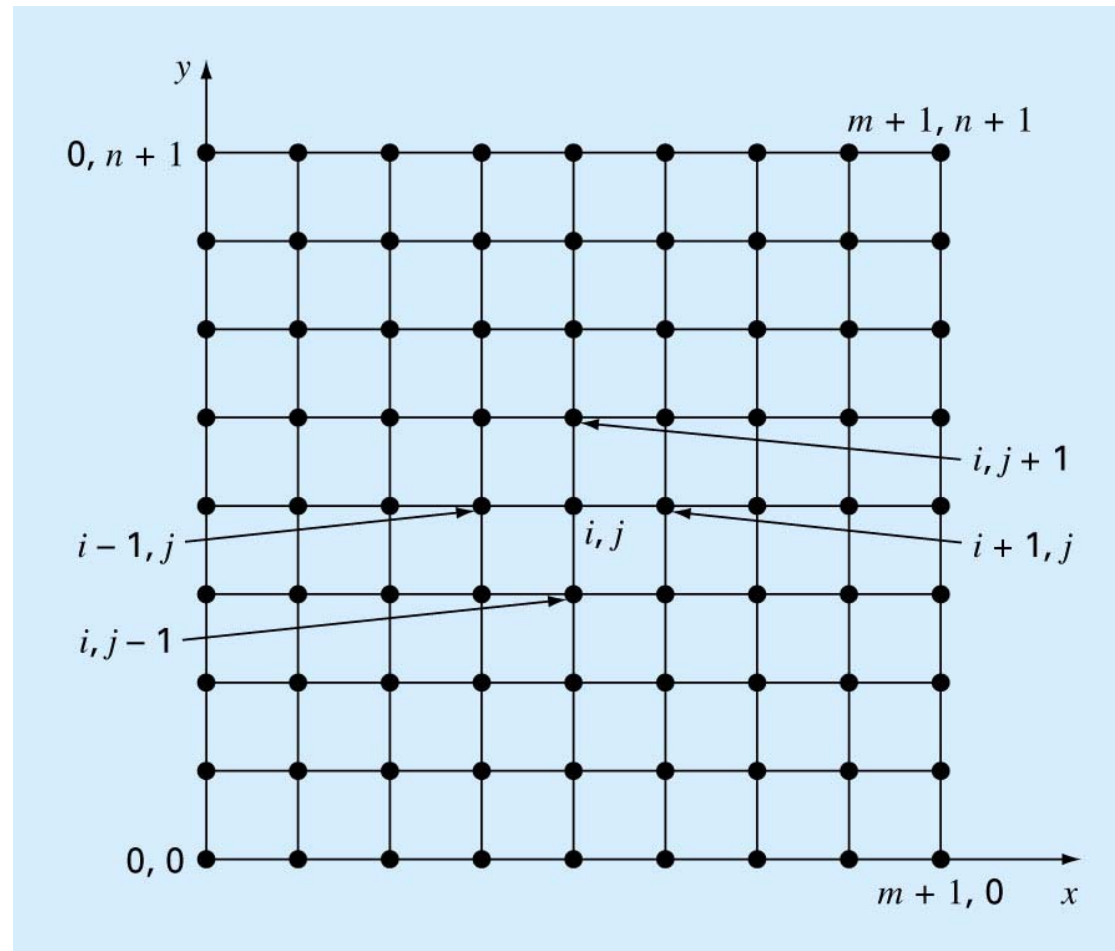
Diferenças Finitas – Eq. Elípticas

- São utilizadas para caracterizar problemas em estado estacionário com condições fronteira
- A solução numérica passa por transformar a equação diferencial numa equação algébrica
- Dada a simplicidade utilizaremos o problema da placa aquecida como exemplo

balanço



grelha



Diferenças finitas...

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\Delta x = \Delta y$$

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Equação de Laplace às diferenças finitas

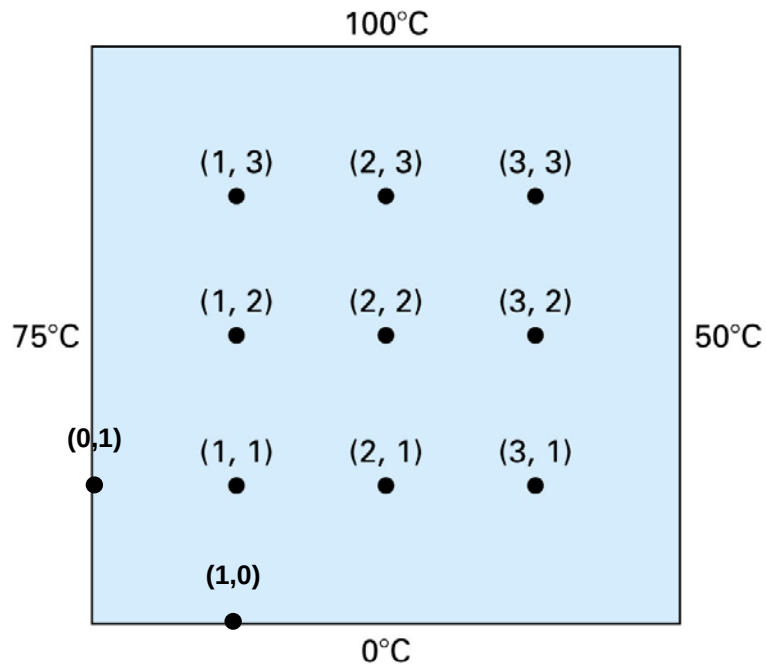
Válida para todos os “nodos” interiores

Condições fronteira

- É necessário especificar as condições fronteira nas bordas da placa
- O caso mais simples é quando a temperatura na fronteira é fixa
 - Condições fronteira de Dirichlet
- Por falta de tempo não vamos considerar o caso em que conhecemos a derivada da função na fronteira
 - Condições fronteira de Newman

Placa com temperaturas na fronteira constantes

Condições fronteira de Dirichlet



$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Equação válida para os nodos interiores
neste caso só para (2,2)

Fazendo o balanço para o nodo (1,1)

$$T_{21} + T_{01} + T_{12} + T_{10} - 4T_{11} = 0$$

$$T_{01} = 75 \quad T_{10} = 0$$

$$-4T_{11} + T_{12} + T_{21} = -75$$

Repetindo para todos os nodos...

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 4T_{11} & -T_{21} & & -T_{12} & & & & & & & = & 75 \\
 -T_{11} & 4T_{21} & -T_{31} & & -T_{22} & & & & & & = & 0 \\
 & -T_{21} & 4T_{31} & & & & -T_{32} & & & & = & 50 \\
 -T_{11} & & & 4T_{12} & -T_{22} & & -T_{13} & & & & = & 75 \\
 & -T_{21} & & -T_{12} & 4T_{22} & -T_{32} & & -T_{23} & & & = & 0 \\
 & & -T_{31} & & -T_{22} & 4T_{32} & & & -T_{33} & & = & 50 \\
 & & & -T_{12} & & & 4T_{13} & -T_{23} & & & = & 175 \\
 & & & & -T_{22} & & -T_{13} & 4T_{23} & -T_{33} & & = & 100 \\
 & & & & & -T_{32} & & -T_{23} & 4T_{33} & & = & 150
 \end{array}$$

Se a outra não se perceber...

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 4T_{11} & -T_{21} & & -T_{12} & & & & & & & = 75 \\
 -T_{11} & +4T_{21} & -T_{13} & & -T_{22} & & & & & & = 0 \\
 & -T_{21} & +4T_{31} & & & -T_{32} & & & & & = 50 \\
 -T_{11} & & & +4T_{12} & -T_{22} & & -T_{13} & & & & = 75 \\
 & -T_{21} & & -T_{12} & +4T_{22} & -T_{32} & & -T_{23} & & & = 0 \\
 & & -T_{31} & & -T_{22} & +4T_{32} & & & -T_{33} & & = 50 \\
 & & & -T_{12} & & & +4T_{13} & -T_{23} & & & = 175 \\
 & & & & -T_{22} & & -T_{13} & +4T_{23} & -T_{33} & & = 100 \\
 & & & & & -T_{32} & & -T_{23} & +4T_{33} & & = 150
 \end{array}$$

Método de Liebman

- Muitas vezes temos matrizes muito maiores e com muitos zeros
- Para este tipo de matrizes poderemos utilizar o método de Gauss-Siedel que quando aplicado à resolução deste tipo de equações é denominado método de Liebman
 - O problema de utilizar métodos de eliminação é que estaremos a gastar uma grande quantidade de memória para guardar zeros...

...Liebman

- No método de Liebman a equação

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

- É transformada em

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

- Dado o sistema ser diagonal dominante o método tem convergência garantida. Podemos mesmo utilizar sobre-relaxação para aumentar a velocidade de convergência

$$T_{i,j}^{novo} = \lambda T_{i,j}^{novo} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{velho} \text{ com } 1 < \lambda < 2$$

- Como critério de paragem podemos utilizar (para todos os pares i,j)

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left| \frac{T_{i,j}^{novo} - T_{i,j}^{velho}}{T_{i,j}^{novo}} \right| 100\% < \varepsilon_s$$