Erros de truncatura e a série de Taylor

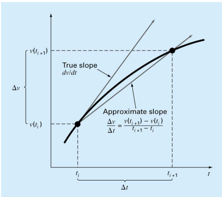
Aula 3

Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia

erros de truncatura

- Resultam de utilizarmos uma aproximação em vez da solução matemática exacta
- Na 1ª aula aproximámos a velocidade do pára-quedista por um quociente de diferenças…
- Introduzimos um <u>erro de truncatura</u> na solução numérica, dado que a solução numérica é uma aproximação da derivada real
- O estudo da série de Taylor permite compreender as propriedades deste tipo de erro….

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$



série de Taylor

- Se uma função f e as suas n+1 derivadas forem contínuas num intervalo contendo <u>a</u> e <u>x</u> então…

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + R_n$$

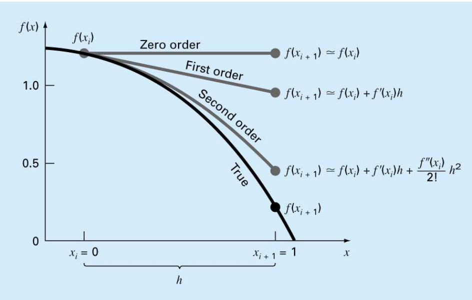
$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

série de Taylor

- Permite calcular o valor de uma função num dado ponto se soubermos o valor da função e das suas derivadas noutro ponto
- Qualquer função “suave” pode ser aproximada por um polinómio.
  - $f(x_{i+1}) \approx f(x_i)$
    - Aproximação de ordem zero somente válida se x_{i+1} e x_i forem muito próximos (ou se a função for constante!)
  - $f(x_{i+1}) \approx f(x_i)+f'(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)$
    - Aproximação de primeira ordem – linear
  - $f(x_{i+1}) \approx f(x_i)+f'(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)+f''(x_i)/2!\;\;(x_{i+1}-x_i)^2$
    - Aproximação de segunda ordem – já permite alguma curvatura…

aumentando a ordem



ordem n

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1}-x_i)^{n+1}$$

Considerando… $x_{i+1}-x_i=h$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

Sendo o resto dado por…

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$R_n = O(h^{n+1})$$

a série de Taylor para estimar erros de truncatura

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1}-t_i)^2 + \ldots + R_n$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + R_1$$ …truncando após a 1ª Derivada.

$$v'(t_i) = \underbrace{\frac{v(t_i)-v(t_{i+1})}{t_{i+1}-t_i}}_{\text{Aproximação de primeira ordem}} - \underbrace{\frac{R_1}{t_{i+1}-t_i}}_{\text{Erro de Truncatura}}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1}-x_i)^{n+1}$$

$$\frac{R_1}{t_{i+1}-t_i} = \frac{v''(\xi)}{2!}(t_{i+1}-t_i)$$

$$\frac{R_1}{t_{i+1}-t_i} = O(t_{i+1}-t_i)$$

Efeito da não linearidade e do tamanho do intervalo (h)

$f(x) = x^m$
- m=1,2, 3 e 4

- A função é linear para m=1
- A não linearidade aumenta com m
- Vamos Prever f(2) a partir de f(1) para vários valores