

Aproximações e Erros de Arredondamento

Aula 2 Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia

23/02/07

João Noronha

1

introdução

- Em muitos problemas de engenharia não é possível a obtenção de soluções analíticas.
- Os métodos numéricos fornecem resultados aproximados e próximos às soluções analíticas (exactas)
 - Não conseguimos calcular com exactidão os erros associados aos métodos numéricos.
 - Só em ocasiões raras é que possuímos dados exactos, visto os dados serem obtidos através de medições.
 - Existe provavelmente erro no "input"
 - Os algoritmos também introduzem erros
 - Erros de arredondamento, aproximações, etc...
 - Os resultados (output) vão conter erros devidos aos dados e ao próprio algoritmo.
- Qual a confiança que podemos ter nos nossos resultados aproximados?
 - Qual a "quantidade" de erro que existe no nosso resultado?
 - Podemos admitir essa "quantidade"?

23/02/07

João Noronha

2

exactidão e precisão

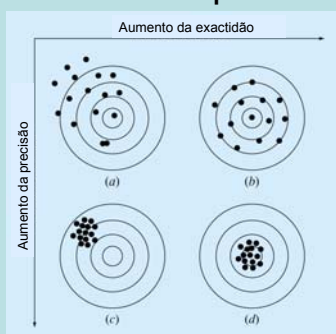
- Exactidão
 - O valor calculado ou medido estar próximo do valor real
- Precisão (ou reprodutibilidade).
 - O valor calculado ou medido estar próximo de outros valores calculados ou medidos
- Inexactidão (ou enviesamento).
 - Um desvio sistemático do valor real
- Imprecisão (ou incerteza)
 - Dispersão elevada

23/02/07

João Noronha

3

Exactidão e precisão

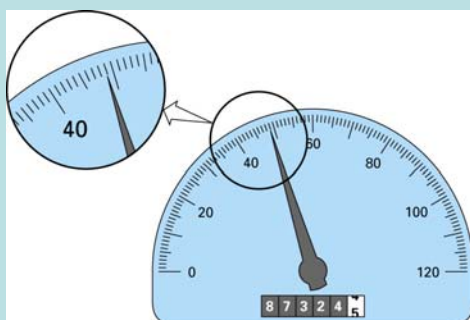


23/02/07

João Noronha

4

algarismos significativos



23/02/07

João Noronha

5

algarismos significativos

- O número de algarismos significativos indicam a precisão
 - São os algarismos que podem ser usados com confiança
 - Normalmente considera-se o número de algarismos "certos" mais um estimado

53 800 Quantos algarismos significativos?

$5,38 \times 10^4$	3
$5,380 \times 10^4$	4
$5,3800 \times 10^4$	5

- Os zeros são utilizados por vezes para permitir a localização da vírgula
 - Neste caso não podem ser contados como algarismos significativos

0,00001753	4
0,0001753	4
0,001753	4

23/02/07

João Noronha

6

definições de erro

Valor Verdadeiro = Aproximação + Erro

$$E_v = \text{Valor Verdadeiro} - \text{Aproximação } (+/-)$$

Erro Verdadeiro

"Erro verdadeiro relativo" = $\frac{\text{erro verdadeiro}}{\text{valor verdadeiro}}$

$$\varepsilon_t = \frac{\text{erro verdadeiro}}{\text{valor verdadeiro}} \times 100\%$$

"Erro verdadeiro relativo percentual"

23/02/07

João Noronha

7

na prática

- Quando utilizamos métodos numéricos só conhecemos o valor verdadeiro quando estamos a resolver problemas que têm solução analítica (problemas simples)
 - Em situações reais não temos o conhecimento prévio do valor verdadeiro, então...

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Erro aproximado}}{\text{Aproximação}} \times 100\%$$

- Se utilizarmos métodos iterativos para atingir a solução...

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Aproximação presente} - \text{Aproximação anterior}}{\text{Aproximação presente}} \times 100\%$$

(+/-)

23/02/07

João Noronha

8

critério de paragem

- Normalmente não nos interessa o sinal do erro
 - Usamos então o valor absoluto do erro.
- Nos métodos iterativos os cálculos são repetidos até se satisfazer um dado critério de paragem

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

% tolerância pré-especificada baseada no conhecimento do problema

- Se o seguinte critério for utilizado

$$\varepsilon_s = (0,5 \times 10^{(2-n)})\%$$

- Podemos garantir que o resultado terá pelo menos n algarismos significativos correctos

23/02/07

João Noronha

9

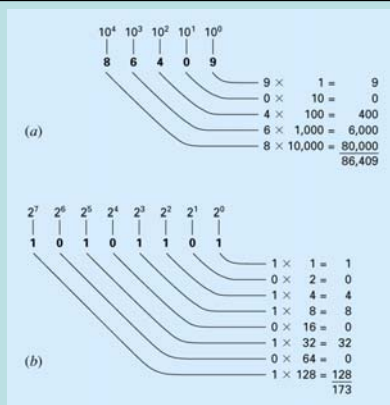
Erros de arredondamento

- Alguns números não podem ser representados utilizando um número finito de algarismos significativos
 - Por exemplo: e , π ou $\sqrt{7}$
- Os computadores não conseguem representar alguns números exactos (na base-10) dado utilizarem uma representação de números na base-2

23/02/07

João Noronha

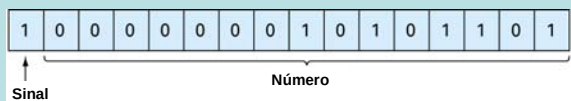
10



23/02/07

João Noronha

11



23/02/07

João Noronha

12

números fraccionários

- Para representar números fraccionários utiliza-se a representação de "virgula flutuante"

$$m \cdot b^e$$

- b é a base
- m é a mantisa
- e é o expoente
- 12,52 será representado por...
 - $0,1252 \times 10^2$
 - se considerarmos $b=10$ e uma mantisa que permita "guardar" 4 algarismos

23/02/07

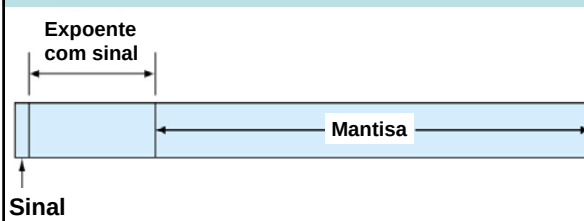
João Noronha

13

números fraccionários

- Para representar números fraccionários utiliza-se a representação de "virgula flutuante"

$$m \cdot b^e$$



23/02/07

João Noronha

14

normalização

- 156,78 >> $0,15678 \times 10^3$

$$\frac{1}{34} = 0,029411765$$

- se só podermos guardar 4 algarismos...

$$0,0294 \times 10^0 \quad \frac{1}{10} \leq |m| < 1$$

- Normalizar para remover o zero à esquerda
 - Multiplicar a mantisa por 10 e baixar o expoente uma unidade
- $0,2941 \times 10^{-1}$

23/02/07

Um algarismo significativo extra!

15

virgula flutuante

$$\frac{1}{b} \leq |m| < 1$$

Então

Num sistema de base 10 $0,1 \leq m < 1$

Num sistema de base 2 $0,5 \leq m < 1$

- A representação em virgula flutuante permite a representação num computador de fracções e de números muito grandes. Mas não há bela sem senão...
 - A representação em virgula flutuante ocupa bastante espaço de memória
 - O processamento é mais lento do que o de números inteiros
 - São introduzidos erros de arredondamento dado que a mantisa só comporta um número finito de algarismos significativos

23/02/07

João Noronha

16

arredondar ou “cortar”?

Exemplo:

$\pi = 3,14159265358$

Guardar num sistema de base-10 que permite 7 algarismos significativos

$\pi = 3,141592$ erro de “cortar” $\epsilon_t = 0,00000065$

Se arredondar-mos

$\pi = 3,141593$

$\epsilon_t = 0,00000035$

- Algumas máquinas usam o “corte” dado que o arredondamento aumenta o esforço computacional (tempo aumenta).
- Se o número de algarismos significativos for suficientemente largo (dupla precisão, extended...) o erro devido a “cortar” torna-se negligível.

23/02/07

João Noronha

17

aritmética e computadores +

$$0,1557 \times 10^1 + 0,4381 \times 10^{-1} = ?$$

$$0,1557 \times 10^1$$

$$\underline{0,004381 \times 10^1}$$

$$0,160081 \times 10^1$$

“cortando”...

$$0,1600 \times 10^1$$

23/02/07

João Noronha

18

aritmética e computadores -

$$36,41 - 26,86 = ?$$

$$\begin{array}{r} 0,3641 \times 10^2 \\ -0,2686 \times 10^2 \\ \hline 0,0955 \times 10^2 \end{array}$$

“normalizando”...

$$0,9550 \times 10^2$$

23/02/07

João Noronha

19

grandes + pequenos

$$4000 + 0,0010 = ?$$

$$\begin{array}{r} 0,4000 \times 10^4 \\ 0,0000001 \times 10^4 \\ \hline 0,4000001 \times 10^4 \end{array}$$

“cortando”...

$$0,4000 \times 10^4$$

23/02/07

João Noronha

20

aritmética e computadores x e /

- Multiplicação
 - Mantisas multiplicadas e expoentes somados
- Divisão
 - Mantisas divididas e expoentes subtraídos

$$0,1363 \times 10^1 \times 0,6423 \times 10^1 = 0,08754548 \times 10^2$$

normalizando...

$$0,8754548 \times 10^1$$

cortando...

$$0,8754 \times 10^1$$

23/02/07

João Noronha

21
