Conceitos básicos de transferência de Calor:

Condução - Lei de Fourier

Fórmula geral para 3 dimensões:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

com ρ - densidade (Kg/m³).

λ_i - condutividade térmica na direcção i (x, y ou z) (W/(m K)).

C_p - Calor específico (J/(Kg K)).

Equação para um cilindro finito (lata) em coordenadas cilíndricas, considerando propriedades térmicas constantes

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

com α - Difusividade térmica (m²/s).

r - coordenada radial (m).

1 Dimensão:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{(\gamma-1)}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha r^{(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Placa Infinita, $\gamma = 1$

Cilindro Infinito, $\gamma = 2$

Esfera, $\gamma = 3$

Soluções analíticas:

Condições:

1. Temperatura inicial homogénea: t=0, $\forall_{x,y,z}$,T(x,y,z)=T_0.

2. Temperatura de aquecimento constante: t>0, T_{surf}=T_1.

3. Coeficiente de transferência de calor infinito: T_{surf}=T_1.

Quando o coeficiente de transferência de calor é finito:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h\left(T_{surf} - T_1\right) \quad \text{(t>0)}$$

com: h - coeficiente de transferência de calor (W/m²/K).

TABELA 1 Soluções analíticas para a equação de Fourier considerando um coeficiente de transferência de calor infinito.

Geometria	Solução Analítica
Placa Infinita	$\frac{T(x,t)-T_0}{T_1-T_0} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-(2n+1)^2\pi^2\alpha t}{4L^2}\right)$
Cilindro Infinito	$\frac{T(r,t)-T_0}{T_1-T_0} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\beta_n r/R)}{\beta_n J_1(\beta_n)}\exp\left(\frac{-\alpha t\beta_n^2}{R^2}\right)$ (*)
Esfera	$\frac{T(r,t)-T_0}{T_1-T_0} = \begin{cases} 1+\frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{R^2}\right) & \text{for } 0<r<R \\ 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{R^2}\right) & \text{for } r=0 \end{cases}$
Cilindro finito	$\frac{T(t,r,x)-T_0}{T_1-T_0} = 1-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_m}\cos\left(\lambda_m\frac{x}{L}\right)\frac{J_0(\beta_n r/R)}{\beta_n J_1(\beta_n)}\exp\left[-\left(\frac{\lambda_m^2}{L^2}+\frac{\beta_n^2}{R^2}\right)\alpha t\right]$ (#)

(*) βn raízes positivas da equação Jo(βn)=0. $J_n(x)$ são funções de Bessel:

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!(i+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{(n+2i)}$$

(#) $\lambda_m = (2m-1)\frac{\pi}{2}$

Convecção - Agitação Completa

$$U_0 A(T_1 - T) = \frac{d(\rho V C_p T)}{dt}$$

com U$_0$ - coeficiente global de transferência de calor (W/m²/K)

A - Área para transferência de calor (m²)

ρ - densidade (kg/m^3)

V - volume (m^3)

C_p - calor específico (J/(Kg K))

T_1 - Temperatura de aquecimento (ºC)

T - Temperatura do produto

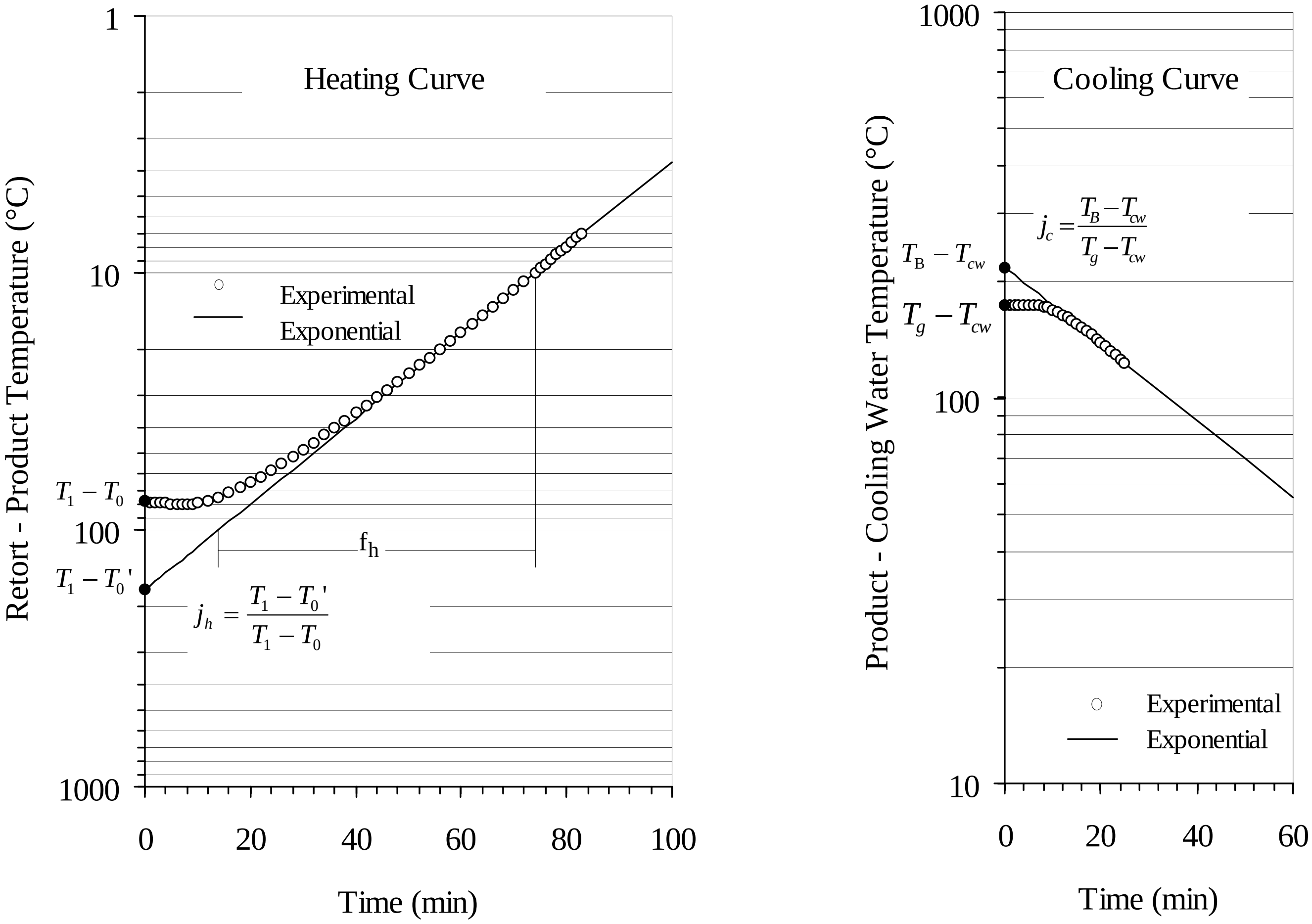
Solução Analítica:

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \exp\left(-\frac{U_0 A t}{m C_p}\right)$$

com m - massa (Kg)

(notar que : m = ρ * V)

Equações empíricas



$$\frac{T(t) - T_1}{T_0 - T_1} = j_h \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_h}\right)}$$

TABELA 2 Valores teóricos para f_h e j

Geometria	f_h	j (centro)	j (fora do centro)
		Condução	
Placa Infinita	$0.933\ \dfrac{L^2}{\alpha}$	1.27324	$1.27324\cos\left(\dfrac{\pi y}{2L}\right)$
Cilindro Infinito	$0.398\dfrac{R^2}{\alpha}$	1.60218	$1.60218 J_0\left(\dfrac{\beta_1 r}{R}\right)$
Esfera	$0.233\dfrac{R^2}{\alpha}$	2.000	$0.63662\dfrac{R}{r}\sin\left(\dfrac{\pi r}{R}\right)$
Cilindro Finito	$\dfrac{0.398}{\left(\dfrac{0.427}{L^2}+\dfrac{1}{R^2}\right)\alpha}$	2.03970	$2.03970 J_0\left(\dfrac{\beta_1 r}{R}\right)\cos\left(\dfrac{\pi y}{2L}\right)$
Paralelepípedo	$\dfrac{0.933}{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\alpha}$	2.06410	$2.06410\cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\dfrac{\pi y}{2b}\right)\cos\left(\dfrac{\pi z}{2c}\right)$
Convecção	$\dfrac{2.303\rho V C_p}{U_0 A}$	1	1

Propriedades de f_h e j

⇒ f_h e j são independentes de T_0 e T_1

⇒ f_h é dependente da difusividade térmica, do coeficiente de tranferencia de calor, da geometria e dimensões

⇒ f_h é independente da posição no recipiente, da distribuição inicial de temperaturas e do CUT (come up time, tempo de subida) da autoclave.

⇒ j é dependente da geometria,posição no recepiente, distribuição inicial de temperaturas e CUT

⇒ j é independente da difusividade térmica.

O Método Matemático - Método de Ball

Derivação do Método de Ball:

Equações para descrever a evolução Temperatura(tempo):

(1) Aquecimento :

$0<t<t_h$ (t=tempo no aquecimento)

Logarítmico,

$$T(t) = T_1 - j_h\left(T_1 - T_o\right) \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_h}\right)}$$

$$j_h = \frac{T_1 - T_0^{'}}{T_1 - T_0}$$

(2) Arrefecimento:

(a) $0<t<t_x$, Hiperbólico (t=tempo no arrefecimento)

$$\frac{\left[T_g + 0.3\left(T_g - T_{cw}\right) - T(t)\right]^2}{\left[0.3\left(T_g - T_{cw}\right)\right]^2} - \frac{t^2}{\left(0.175 f_h\right)^2} = 1$$

$$\text{ou, } T(t) = T_g - a\left(\sqrt{1 + \left(\frac{t}{b}\right)^2} - 1\right)$$

com:

$$a = 0.3(T_g - T_{cw});\ b = 0.5275 \cdot t_x;\ t_x = f_c \log\left(\frac{j_c}{0.675}\right)$$

(b) $t>t_x$, Logarítmico,

$$T = T_{cw} + j_c(T_g - T_{cw}) \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_c}\right)}$$

$$j_c = \frac{T_B - T_w}{T_g - T_w}$$

Vimos anteriormente que o "valor de processamento" é dado por,

$$F = \int_0^{t_p} L \cdot dt$$

com, $L = 10^{\frac{T(t)-T_{ref}}{z}}$

Considerando as diferentes fases do processo, temos:

$$F = \int_0^{t_h} L \cdot dt + \int_{t_h}^{t_h+t_x} L \cdot dt + \int_{t_h+t_x}^{t_p} L \cdot dt$$

i.e., $$F = F_h + F_{c1} + F_{c2}$$

Considerando a contribuição da fase de aquecimento:

Vimos que:

$$T(t) = T_1 - j_h\left(T_1 - T_o\right) \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_h}\right)}$$

equivalente a,

$$t = f_h \cdot \log(j_h) + f_h \cdot \log(T_1 - T_0) - f_h \cdot \log(T_1 - T(t))$$

$$\frac{dt}{dT} = ?$$

$$\frac{dt}{dT} = 0 + 0 - f_h \cdot \frac{1}{2.303} \cdot \frac{1}{\left(T_1 - T(t)\right)} \cdot (-1)$$

Tendo em atenção que quando t=0, T=T_0 e que quando t=t_h, T=T_g, temos:

$$F_h = \int_{T_0}^{T_g} \frac{f_h}{2.303\left(T_1 - T\right)} \cdot 10^{\left(\frac{T-T_{ref}}{z}\right)} dT$$

Considerando ainda que $T\text{-}T_{ref}= T\text{-}T_g+T_g\text{-}T_{ref}$, temos:

$$F_h = f_h \cdot 10^{\left(\frac{T_g - T_{ref}}{z}\right)} \cdot \int_{T_0}^{T_g} \frac{1}{2.303(T_1 - T)} \cdot 10^{\left(\frac{T - T_g}{z}\right)} dT$$

ou,

$$F_h = f_h \cdot L_g \cdot C_1$$

Por analogia podemos determinar para as restantes fases:

$$F_{c1} = f_c \cdot L_g \cdot C_2$$

$$F_{c2} = f_c \cdot L_g \cdot C_3$$

Tendo assim expressões para todos os termos necessários ao cálculo do valor F na equação:

$$F = F_h + F_{c1} + F_{c2}$$

De modo a simplificar os cálculos dos integrais e reduzir o número de tabelas e gráficos necessários para os cálculos, Ball fez as seguintes assunções:

(a) $f=f_h=f_c$

(b) $j_c=1.41$

(c) $L \approx 0$ para $T<80$ºC

Então,

$$F = f \cdot L_g \cdot C$$

com, $C(T_1\text{-}T_g,\ T_1\text{-}T_w,\ z)$.

(De acordo com a notação utilizada por Ball, $T_1\text{-}T_g = g$ e $T_1\text{-}T_w= m+g$)

Considerando ainda que, T_g-T_{ref}=T_g-T_1+T_1-T_{ref},

$$F = f \cdot L_1 \cdot C'$$

Definindo os seguintes símbolos:

- $F_i = 10^{\frac{T_{ref} - T_1}{z}} = \frac{1}{L_1}$

- $U = F \cdot F_i = \frac{F}{L_1}$

- $\frac{f}{U} = \frac{1}{C'}$

O Valor F pode ser então calculado a partir da equação,

$$F = \frac{f}{\left(\frac{f}{U}\right) F_i}$$

Existem gráficos que nos permitem a determinação de $\frac{f}{U}$ em função de g, m+g e z.

Aplicação do Método de Ball:

Cálculo de F_0

(1) Calcular log g considerando a seguinte equação:

$$\log g = \log jI - \frac{B_B}{f_h}$$

sendo I - T_1-T_0 (ºC).

B_B-Tempo de processamento de Ball:

$$B_B = t_h + 0.42 * CUT$$

(2) Calcular f_h/U nos gráficos de f_h/U vs. log g.

(3) Calcular F_0 como:

$$F_0 = \frac{f_h}{(f_h / U) F_i}$$

onde F_i é dado por,

$$F_i = 10^{\frac{T_{ref} - T_1}{z}} \tag{1}$$

Cálculo do tempo de processamento para um dado valor F

(1) Calcular f_h/U,

$$f_h / U = \frac{f_h}{F_0 F_i} \tag{2}$$

(2) Determinar log g a partir dos gráficos f_h/U vs. log g.

(3) Calcular B_B usando a equação,

$$B_B = f_h (\log jI - \log g) \tag{3}$$

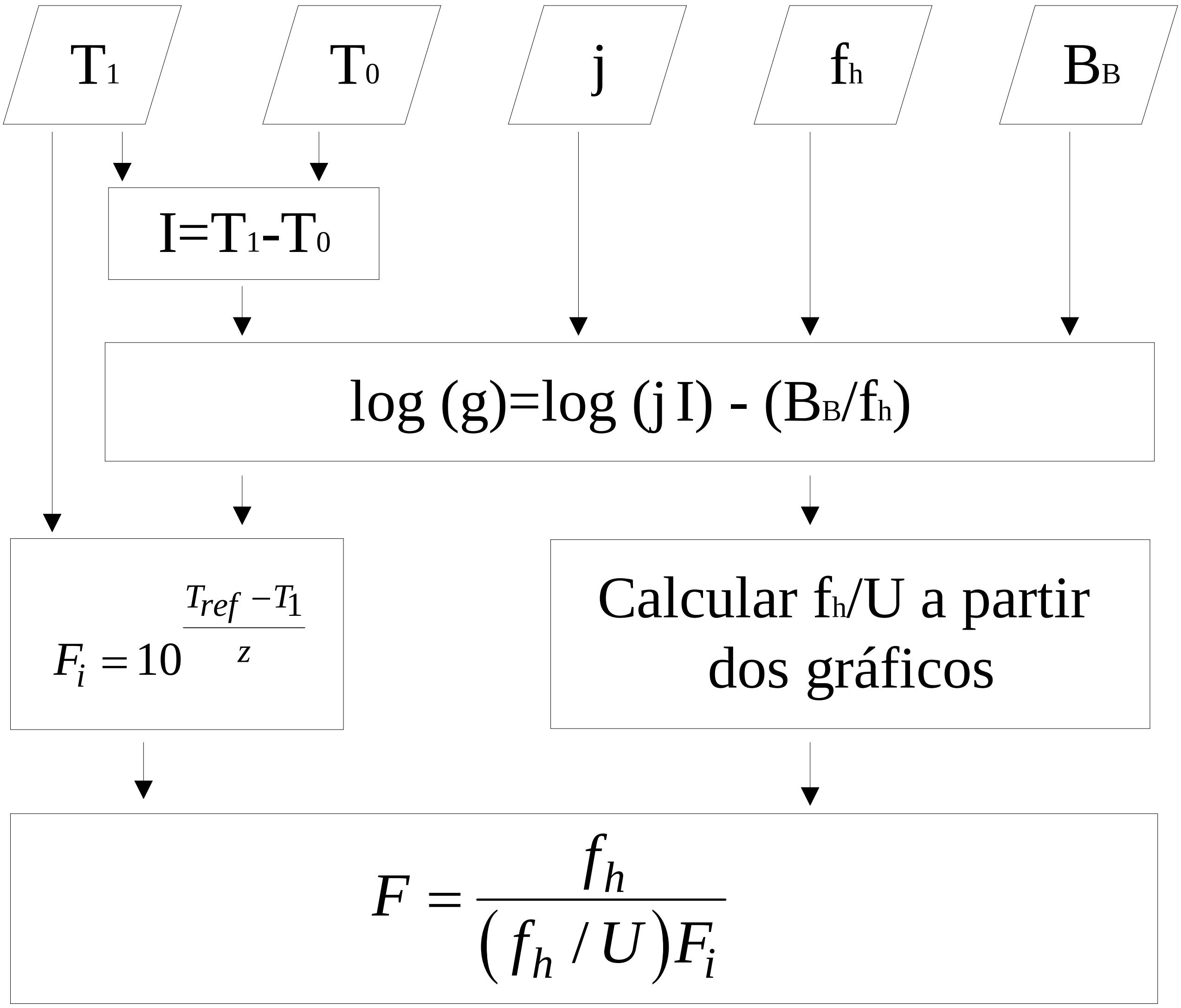


Fig. 1. Cálculo do valor F

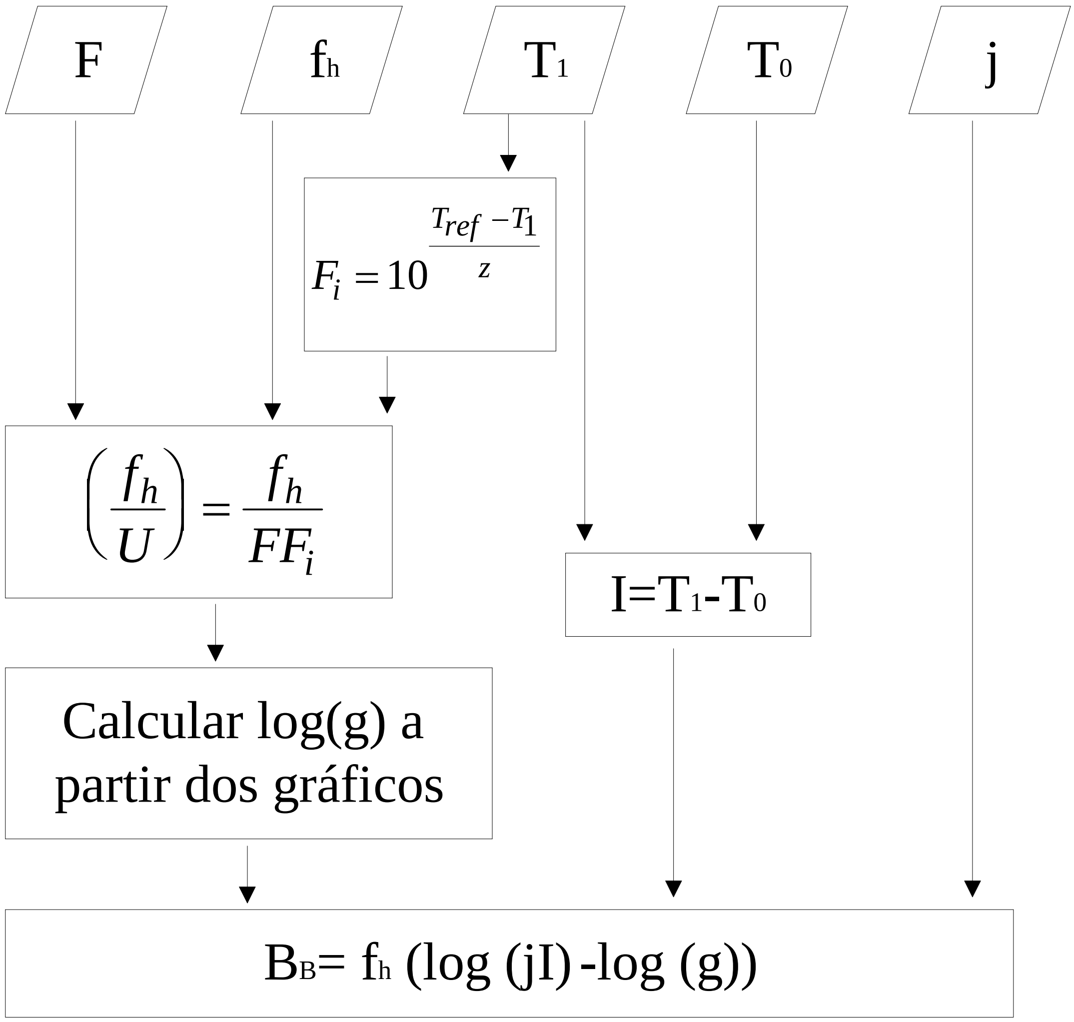


Fig. 2. Cálculo do tempo de processamento

Método de Ball . Exemplo 1.

Calcular o valor F para o seguinte processo, considerando z= 16 ºF e Tref=250ºF

<u>Parâmetros do Processo:</u>

CUT = 10 min

Holding = 58.5 min

Temperatura de Processamento = 245ºF (118.3ºC)

Temperatura Inicial do Produto = 180ºF (82.2ºC)

Temperatura Água de Arrefecimento = 65ºF (18.3ºF)

<u>Parâmetros de aquecimento do Produto</u>

f_h= 49.0 min e j_{hb} = 2.0

Resolução:

T_1= 245ºF T_0= 180ºF

B_B= 0.42 * CUT + 58.5 = 0.42 * 10 + 58.5 = 62.7 min

I=T_1-T_o= 245-180 = 65 ºF

log (g) = log (jI)- B_B/f_h = log (2.0 * 65) - 62.7/49.0 = 0.834

$$F_i = 10^{\frac{T_{ref} - T_1}{z}} = \frac{1}{L_1} = 2.054$$

m+g = T1-Tw = 245 - 65 = 180 ºF

No gráfico : z=16ºF; log (g)= 0.834; m+g=180º então f_h/U= 8.0

$$F = \frac{f}{\left(\frac{f}{U}\right) F_i}$$ = 49/(8*2.054) =**2.98 min**

Método de Ball . Exemplo 2.

Cálculo do tempo de processamento necessário para se atingir um valor F_0 = 3.5 min.
z= 10ºC (18 ºF) e Tref=121ºC (250ºF)

<u>Parâmetros do Processo:</u>

CUT = 8 min

Temperatura de Processamento = 248ºF (120ºC)

Temperatura Inicial do Produto = 120ºF (48.8ºC)

Temperatura Água de Arrefecimento = 118ºF (47.7ºF)

<u>Parâmetros de aquecimento do Produto</u>

f_h= 11.4 min e j_{hb} = 0.98

Resolução:

$$F_i = 10^{\frac{T_{ref} - T_1}{z}} = \frac{1}{L_1} = 1.2915$$

I = 248 - 120 = 128ºF

fh/U= 11.4/ (3.5 * 1.2915) = 2.52

m+g= T1-Tw=248-118=130ºC

No Gráfico : m+g= 130ºF ; fh/U=2.52; z= 18ºC então log(g)= 0.47

BB= fh (log (jI)-log(g))= 18.56

th = BB - 0.42 *CUT = 18.56- 0.42 * 8= **15.2 min**