

Conceitos básicos de transferência de Calor:

Condução - Lei de Fourier

Fórmula geral para 3 dimensões:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

com ρ - densidade (Kg/m³).

λ_i - condutividade térmica na direcção i (x, y ou z) (W/(m K)).

C_p - Calor específico (J/(Kg K)).

Equação para um cilindro finito (lata) em coordenadas cilíndricas, considerando propriedades térmicas constantes

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

com α - Difusividade térmica (m²/s).

r - coordenada radial (m).

1 Dimensão:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{(\gamma-1)}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha r^{(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Placa Infinita, $\gamma = 1$

Cilindro Infinito, $\gamma = 2$

Esfera, $\gamma = 3$

Soluções analíticas:

Condições:

1. Temperatura inicial homogênea: $t=0, \forall_{x,y,z}, T(x,y,z)=T_0$.
2. Temperatura de aquecimento constante: $t>0, T_{\text{surf}}=T_1$.
3. Coeficiente de transferência de calor infinito: $T_{\text{surf}}=T_1$.

Quando o coeficiente de transferência de calor é finito:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h(T_{\text{surf}} - T_1) \quad (t>0)$$

com: h - coeficiente de transferência de calor ($\text{W/m}^2/\text{K}$).

TABELA 1 Soluções analíticas para a equação de Fourier considerando um coeficiente de transferência de calor infinito.

Geometria	Solução Analítica
Placa Infinita	$\frac{T(x,t) - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 \pi^2 \alpha t}{4L^2}\right)$
Cilindro Infinito	$\frac{T(r,t) - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n r / R)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \exp\left(\frac{-\alpha t \beta_n^2}{R^2}\right) \quad (*)$
Esfera	$\frac{T(r,t) - T_0}{T_1 - T_0} = \begin{cases} 1 + \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \alpha t}{R^2}\right) & \text{for } 0 < r < R \\ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \alpha t}{R^2}\right) & \text{for } r = 0 \end{cases}$
Cilindro finito	$\frac{T(t,r,x) - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_m} \cos\left(\lambda_m \frac{x}{L}\right) \frac{J_0(\beta_n r / R)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \exp\left[-\left(\frac{\lambda_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{R^2}\right) \alpha t\right] \quad (\#)$

(*) β_n raízes positivas da equação $J_0(\beta_n)=0$. $J_n(x)$ são funções de Bessel:

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(i+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(n+2i)}$$

$$(\#) \lambda_m = (2m-1) \frac{\pi}{2}$$

Convecção - Agitação Completa

$$U_0 A (T_1 - T) = \frac{d(\rho V C_p T)}{dt}$$

com U_0 - coeficiente global de transferência de calor (W/m²/K)

A - Área para transferência de calor (m²)

ρ - densidade (kg/m³)

V - volume (m³)

C_p - calor específico (J/(Kg K))

T_1 - Temperatura de aquecimento (°C)

T - Temperatura do produto

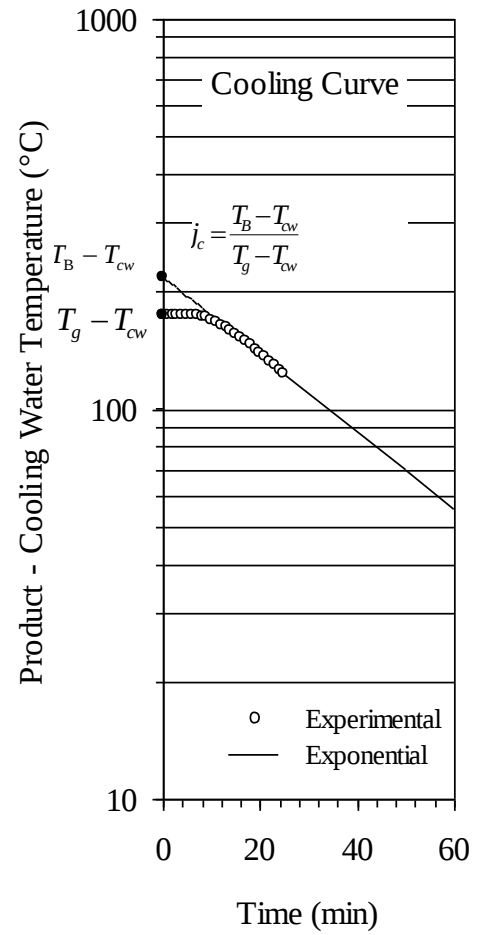
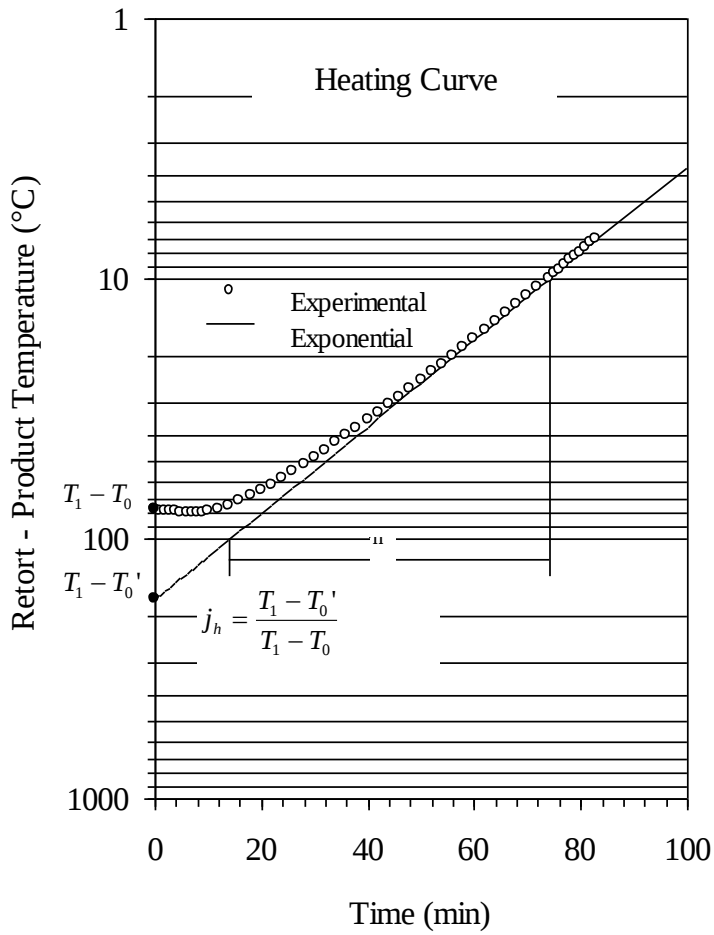
Solução Analítica:

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \exp\left(-\frac{U_0 A t}{m C_p}\right)$$

com m - massa (Kg)

(notar que : $m = \rho * V$)

Equações empíricas



$$\frac{T(t) - T_1}{T_0 - T_1} = j_h \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_h}\right)}$$

TABELA 2 Valores teóricos para f_h e j

Geometria	f_h	j (centro)	j (fora do centro)
<i>Condução</i>			
Placa Infinita	$0.933 \frac{L^2}{\alpha}$	1.27324	$1.27324 \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right)$
Cilindro Infinito	$0.398 \frac{R^2}{\alpha}$	1.60218	$1.60218 J_0\left(\frac{\beta_1 r}{R}\right)$
Esfera	$0.233 \frac{R^2}{\alpha}$	2.000	$0.63662 \frac{R}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)$
Cilindro Finito	$\frac{0.398}{\left(\frac{0.427}{L^2} + \frac{1}{R^2}\right)\alpha}$	2.03970	$2.03970 J_0\left(\frac{\beta_1 r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right)$
Paralelepípedo	$\frac{0.933}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\alpha}$	2.06410	$2.06410 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2c}\right)$
Convecção	$\frac{2.303 \rho V C_p}{U_0 A}$	1	1

Propriedades de f_h e j

$\Rightarrow f_h$ e j são independentes de T_0 e T_1

$\Rightarrow f_h$ é dependente da difusividade térmica, do coeficiente de transferência de calor, da geometria e dimensões

$\Rightarrow f_h$ é independente da posição no recipiente, da distribuição inicial de temperaturas e do CUT (come up time, tempo de subida) da autoclave.

$\Rightarrow j$ é dependente da geometria, posição no recipiente, distribuição inicial de temperaturas e CUT

$\Rightarrow j$ é independente da difusividade térmica.

O Método Matemático - Método de Ball

Derivação do Método de Ball:

Equações para descrever a evolução Temperatura(tempo):

(1) Aquecimento :

$0 < t < t_h$ (t=tempo no aquecimento)

Logarítmico,

$$T(t) = T_1 - j_h(T_1 - T_o) \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_h}\right)}$$

$$j_h = \frac{T_1 - T'_0}{T_1 - T_0}$$

(2) Arrefecimento:

(a) $0 < t < t_x$, Hiperbólico (t=tempo no arrefecimento)

$$\frac{\left[T_g + 0.3(T_g - T_{cw}) - T(t)\right]^2}{\left[0.3(T_g - T_{cw})\right]^2} - \frac{t^2}{(0.175 f_h)^2} = 1$$

$$\text{ou, } T(t) = T_g - a \left(\sqrt{1 + \left(\frac{t}{b}\right)^2} - 1 \right)$$

com:

$$a = 0.3(T_g - T_{cw}); b = 0.5275 \cdot t_x; t_x = f_c \log\left(\frac{j_c}{0.675}\right)$$

(b) $t > t_x$, Logarítmico,

$$T = T_{cw} + j_c(T_g - T_{cw}) \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_c}\right)}$$

$$j_c = \frac{T_B - T_w}{T_g - T_w}$$

Vimos anteriormente que o “valor de processamento” é dado por,

$$F = \int_0^{t_p} L \cdot dt$$

com, $L = 10^{\frac{T(t)-T_{ref}}{z}}$

Considerando as diferentes fases do processo, temos:

$$F = \int_0^{t_h} L \cdot dt + \int_{t_h}^{t_h+t_x} L \cdot dt + \int_{t_h+t_x}^{t_p} L \cdot dt$$

i.e., $F = F_h + F_{c1} + F_{c2}$

Considerando a contribuição da fase de aquecimento:

Vimos que:

$$T(t) = T_1 - j_h(T_1 - T_o) \cdot 10^{\left(-\frac{t}{f_h}\right)}$$

equivalente a,

$$t = f_h \cdot \log(j_h) + f_h \cdot \log(T_1 - T_o) - f_h \cdot \log(T_1 - T(t))$$

$$\frac{dt}{dT} = ?$$

$$\frac{dt}{dT} = 0 + 0 - f_h \cdot \frac{1}{2.303} \cdot \frac{1}{(T_1 - T(t))} \cdot (-1)$$

Tendo em atenção que quando $t=0$, $T=T_o$ e que quando $t=t_h$, $T=T_g$, temos:

$$F_h = \int_{T_o}^{T_g} \frac{f_h}{2.303(T_1 - T)} \cdot 10^{\left(\frac{T-T_{ref}}{z}\right)} dT$$

Considerando ainda que $T - T_{\text{ref}} = T - T_g + T_g - T_{\text{ref}}$, temos:

$$F_h = f_h \cdot 10^{\left(\frac{T_g - T_{\text{ref}}}{z}\right)} \cdot \int_{T_0}^{T_g} \frac{1}{2.303(T_1 - T)} \cdot 10^{\left(\frac{T - T_g}{z}\right)} dT$$

ou,

$$F_h = f_h \cdot L_g \cdot C_1$$

Por analogia podemos determinar para as restantes fases:

$$F_{c1} = f_c \cdot L_g \cdot C_2$$

$$F_{c2} = f_c \cdot L_g \cdot C_3$$

Tendo assim expressões para todos os termos necessários ao cálculo do valor F na equação:

$$F = F_h + F_{c1} + F_{c2}$$

De modo a simplificar os cálculos dos integrais e reduzir o número de tabelas e gráficos necessários para os cálculos, Ball fez as seguintes suposições:

(a) $f = f_h = f_c$

(b) $j_c = 1.41$

(c) $L \approx 0$ para $T < 80^\circ\text{C}$

Então,

$$F = f \cdot L_g \cdot C$$

com, $C(T_1 - T_g, T_1 - T_w, z)$.

(De acordo com a notação utilizada por Ball, $T_1 - T_g = g$ e $T_1 - T_w = m + g$)

Considerando ainda que, $T_g - T_{ref} = T_g - T_1 + T_1 - T_{ref}$,

$$F = f \cdot L_1 \cdot C'$$

Definindo os seguintes símbolos:

$$\bullet \quad F_i = 10^{\frac{T_{ref} - T_1}{z}} = \frac{1}{L_1}$$

$$\bullet \quad U = F \cdot F_i = \frac{F}{L_1}$$

$$\bullet \quad \frac{f}{U} = \frac{1}{C'}$$

O Valor F pode ser então calculado a partir da equação,

$$F = \frac{f}{\left(\frac{f}{U}\right)^{F_i}}$$

Existem gráficos que nos permitem a determinação de $\frac{f}{U}$ em função de g, m+g e z.

Aplicação do Método de Ball:

Cálculo de F_0

(1) Calcular $\log g$ considerando a seguinte equação:

$$\log g = \log jI - \frac{B_B}{f_h}$$

sendo $I = T_1 - T_0$ (°C).

B_B - Tempo de processamento de Ball:

$$B_B = t_h + 0.42 * CUT$$

(2) Calcular f_h/U nos gráficos de f_h/U vs. $\log g$.

(3) Calcular F_0 como:

$$F_0 = \frac{f_h}{(f_h/U)F_i}$$

onde F_i é dado por,

$$F_i = 10^{\frac{T_{ref} - T_1}{z}} \quad (1)$$

Cálculo do tempo de processamento para um dado valor F

(1) Calcular f_h/U ,

$$f_h/U = \frac{f_h}{F_0 F_i} \quad (2)$$

(2) Determinar $\log g$ a partir dos gráficos f_h/U vs. $\log g$.

(3) Calcular B_B usando a equação,

$$B_B = f_h (\log jI - \log g) \quad (3)$$

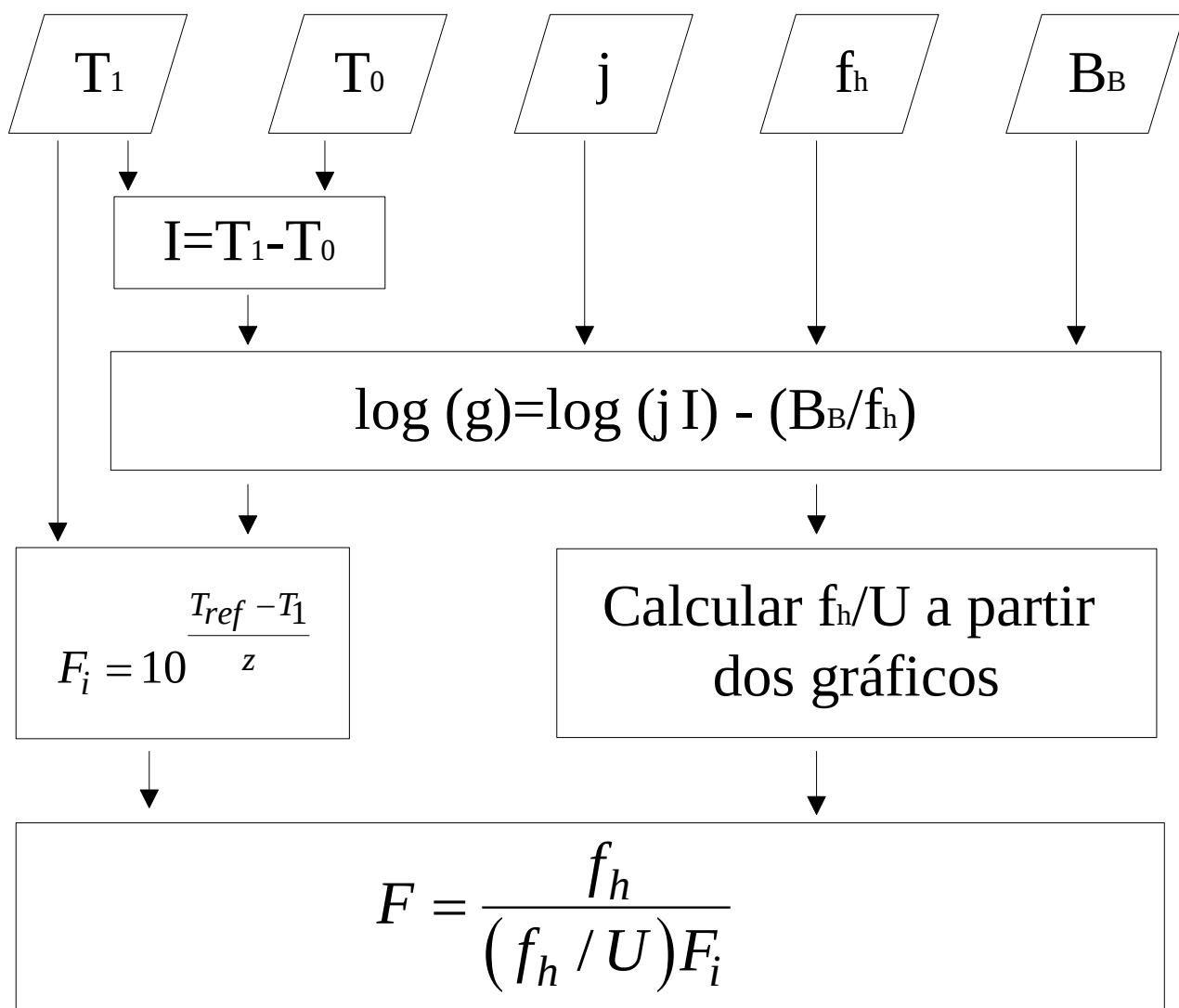


Fig. 1. Cálculo do valor F

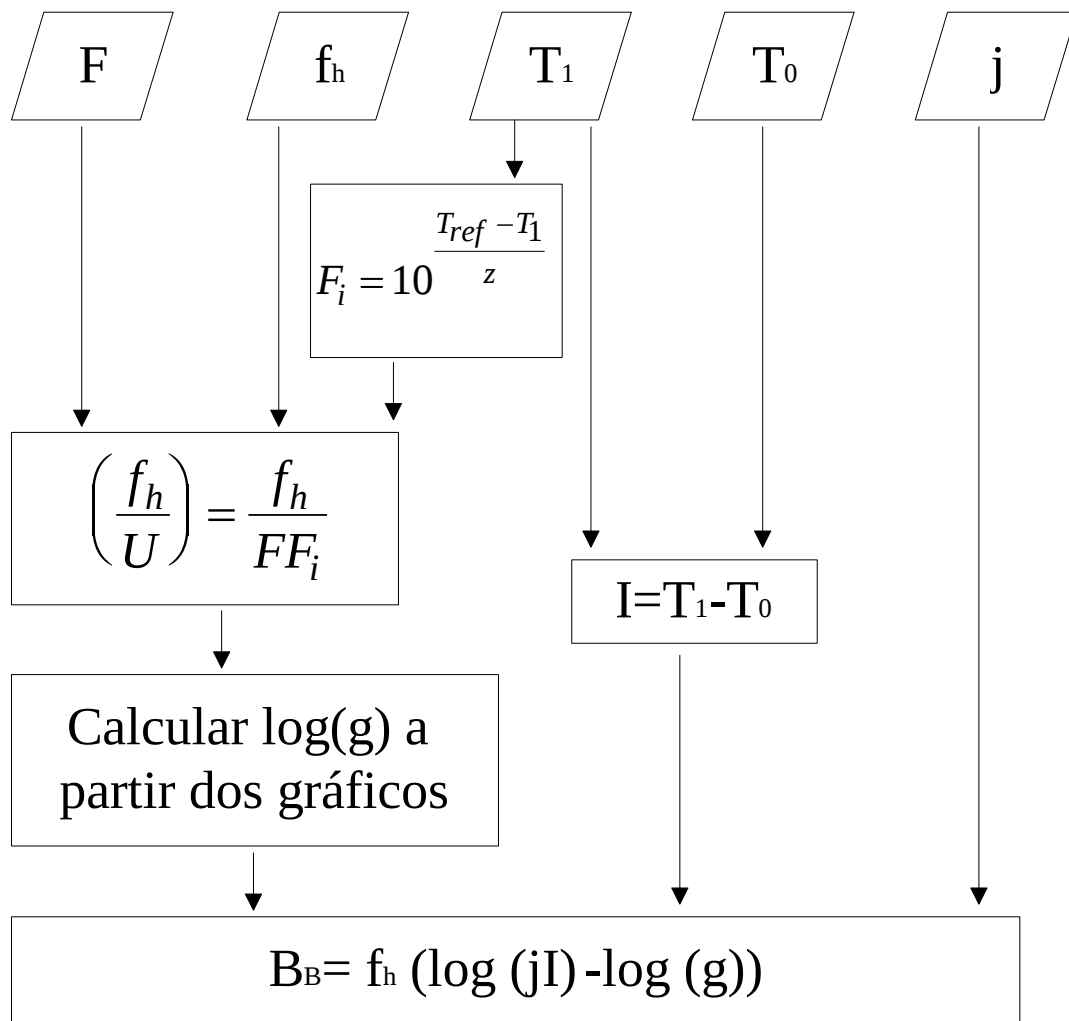


Fig. 2. Cálculo do tempo de processamento

Método de Ball . Exemplo 1.

Calcular o valor F para o seguinte processo, considerando $z = 16^\circ\text{F}$ e $T_{\text{ref}} = 250^\circ\text{F}$

Parâmetros do Processo:

CUT = 10 min

Holding = 58.5 min

Temperatura de Processamento = 245°F (118.3°C)

Temperatura Inicial do Produto = 180°F (82.2°C)

Temperatura Água de Arrefecimento = 65°F (18.3°F)

Parâmetros de aquecimento do Produto

$f_h = 49.0$ min e $j_{hb} = 2.0$

Resolução:

$T_1 = 245^\circ\text{F}$ $T_0 = 180^\circ\text{F}$

$$B_B = 0.42 * \text{CUT} + 58.5 = 0.42 * 10 + 58.5 = 62.7 \text{ min}$$

$$I = T_1 - T_0 = 245 - 180 = 65^\circ\text{F}$$

$$\log(g) = \log(jI) - B_B/f_h = \log(2.0 * 65) - 62.7/49.0 = 0.834$$

$$F_i = 10^{\frac{T_{\text{ref}} - T_1}{z}} = \frac{1}{L_1} = 2.054$$

$$m+g = T_1 - T_w = 245 - 65 = 180^\circ\text{F}$$

No gráfico : $z = 16^\circ\text{F}$; $\log(g) = 0.834$; $m+g = 180^\circ$ então $f_h/U = 8.0$

$$F = \frac{f}{\left(\frac{f}{U}\right) F_i} = 49/(8 * 2.054) = \mathbf{2.98 \text{ min}}$$

Método de Ball . Exemplo 2.

Cálculo do tempo de processamento necessário para se atingir um valor $F_0 = 3.5$ min. $z = 10^\circ\text{C}$ (18°F) e $T_{\text{ref}} = 121^\circ\text{C}$ (250°F)

Parâmetros do Processo:

CUT = 8 min

Temperatura de Processamento = 248°F (120°C)

Temperatura Inicial do Produto = 120°F (48.8°C)

Temperatura Água de Arrefecimento = 118°F (47.7°F)

Parâmetros de aquecimento do Produto

$f_h = 11.4$ min e $j_{hb} = 0.98$

Resolução:

$$F_i = 10^{\frac{T_{\text{ref}} - T_1}{z}} = \frac{1}{L_1} = 1.2915$$

$$I = 248 - 120 = 128^\circ\text{F}$$

$$f_h/U = 11.4 / (3.5 * 1.2915) = 2.52$$

$$m+g = T_1 - T_w = 248 - 118 = 130^\circ\text{C}$$

No Gráfico : $m+g = 130^\circ\text{F}$; $f_h/U = 2.52$; $z = 18^\circ\text{C}$ então $\log(g) = 0.47$

$$BB = f_h (\log(jI) - \log(g)) = 18.56$$

$$\mathbf{th = BB - 0.42 * CUT = 18.56 - 0.42 * 8 = 15.2 \text{ min}}$$